LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 2.3.3.1. Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overline{\mathrm{arc}}\tan(3x)-3x}{e^{x^2}-2x\ln(1+x)-2\cos(x)+1}.$$

Ratkaisu: Tunnetaan Maclaurinin kehitelmät

$$\begin{array}{rlrl} \overline{\mathrm{arc}}\tan(x) &= x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots,\ |x|<1, & e^x &= 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots,\ x\in\mathbb{R}, \\ \ln(1+x) &= x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots,\ |x|<1, & \cos(x) &= 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots,\ x\in\mathbb{R}, \end{array}$$

joten

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\overline{\mathrm{arc}}\tan(3x)-3x}{e^{x^2}-2x\ln(1+x)-2\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x-\dfrac{(3x)^3}{3}+\dfrac{(3x)^5}{5}-\cdots-3x}{1+x^2+\dfrac{(x^2)^2}{2!}+\dfrac{(x^2)^3}{3!}+\cdots-2x(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots)-2(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{3^3x^3}{3}+\dfrac{3^5x^5}{5}-\cdots}{1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+\cdots-2x^2+x^3-\dfrac{2x^4}{3}+\cdots-2+x^2-\dfrac{2x^4}{4!}+\cdots+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\dfrac{3^3x^3}{3}+\dfrac{3^5x^5}{5}-\cdots):x^3}{(\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+\cdots+x^3-\dfrac{2x^4}{3}+\cdots-\dfrac{2x^4}{4!}+\cdots):x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{3^3}{3}+\dfrac{3^5x^2}{5}-\cdots}{\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+1-\dfrac{2x}{3}+\cdots-\dfrac{2x}{4!}+\cdots} = -9.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.3.3.2. Olkoon $a \neq 0$ reaaliluku. Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$L_a = \lim_{x \to 0} \frac{xe^{ax} - x - ax^2}{\ln(1 + x^3)}.$$

Millä reaaliluvun $a \neq 0$ arvoilla $L_a = 1$?
Ratkaisu: Tunnetaan Maclaurinin kehitelmät

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R},$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,\ |x| < 1,$$

joten

$$\begin{aligned}
L_a &= \lim_{x \to 0} \frac{xe^{ax} - x - ax^2}{\ln(1 + x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^4}{4!} + \cdots) - x - ax^2}{x^3 - \frac{(x^3)^2}{2} + \frac{(x^3)^3}{3} - \frac{(x^3)^4}{4} + \cdots} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^4x^4}{4!} + \cdots) - x - ax^2}{x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \cdots} = \lim_{x \to 0} \frac{x + ax^2 + \frac{a^2x^3}{2!} + \frac{a^3x^4}{3!} + \cdots - x - ax^2}{x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \cdots} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\frac{a^2x^3}{2!} + \frac{a^3x^4}{3!} + \cdots) : x^3}{(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \cdots) : x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a^2}{2!} + \frac{a^3x}{3!} + \cdots}{1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots} = \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ehto $L_a = 1$ toteutuu, kun $a = \pm\sqrt{2}$.

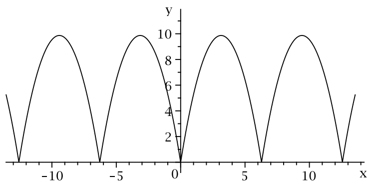
Esimerkki 2.4.1. Hahmottele 2π-jaksollisen funktion

$$f(x) = -(x-\pi)^2 + \pi^2, \text{kun} \quad 0 \le x < 2\pi$$

kuvaaja ja määrää funktion Fourier-sarja $S(x)$. Laske tuloksen $S(\pi) = f(\pi)$ avulla sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

summalle tarkka arvo. Opastus: Osittaisintegroinnilla voidaan johtaa seuraavat kaavat:
$\int (t-\pi)^2 \cos(kt)\,dt = k^{-3}[(\pi^2k^2 - 2\pi k^2 t + k^2t^2 - 2)\sin(kt) + (2kt - 2\pi k)\cos(kt)] + C,$
$\int (t-\pi)^2 \sin(kt)\,dt = k^{-3}[(-\pi^2k^2 + 2\pi k^2 t - k^2t^2 + 2)\cos(kt) + (2kt - 2\pi k)\sin(kt)] + C.$
Ratkaisu:



Lasketaan Fourier-sarjan kertoimet annetuilla kaavoilla:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [-(t-\pi)^2 + \pi^2]\,dt = \frac{1}{\pi}\Big/_0^{2\pi} [-\frac{(t-\pi)^3}{3} + \pi^2 t] = \frac{4\pi^2}{3}, \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [-(t-\pi)^2\cos(kt) + \pi^2\cos(kt)]\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\Big/_0^{2\pi} k^{-3}[(-\pi^2k^2 + 2\pi k^2 t - k^2t^2 + 2)\sin(kt) + (-2kt + 2\pi k)\cos(kt) + k^{-1}\pi^2\sin(kt)]\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}k^{-3}[0 - 4\pi k + 2\pi k + 0 - (0 + 0 + 2\pi k + 0)] = -\frac{4}{k^2}, \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [-(t-\pi)^2 + \pi^2]\sin(kt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\Big/_0^{2\pi} k^{-3}[(\pi^2k^2 - 2\pi k^2 t + k^2t^2 - 2)\cos(kt) + (-2kt + 2\pi k)\sin(kt) - k^{-1}\pi^2\cos(kt)]\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}k^{-3}[\pi^2k^2 - 2\pi k^2 2\pi + k^2 4\pi^2 - 2 + 0 - k^{-1}\pi^2 - (\pi^2k^2 - 2 + 0 - k^{-1}\pi^2)] = 0.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan lasketut kertoimet Fourier-kehitelmään:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right] = \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos(kx).$$

Tiedetään, että $S(\pi) = f(\pi) = \pi^2$, joten

$$\pi^2 = S(\pi) = \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{k^2}.$$

Tästä voidaan ratkaista sarjan summa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$