LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 2.3.1.1. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäde:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k^2+4) e^{-k} (x-1)^k$, c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e}{k \ln(k)} x^k$, d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k!}}{\sqrt{2k+1}} (x+3)^k$.

Millä reaaliluvun x arvoilla potenssisarja varmasti suppenee?

Ratkaisu:

a)

Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1} k!}{3^k k!(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k+1} = 0.$$

Suppenemissäde on $R = \frac{1}{L} = \infty$. Potenssisarja varmasti suppenee, kun $-\infty < x < \infty$.

b)

Olkoon $t = x - 1$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k^2+4) e^{-k} t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}((k+1)^2+4)e^{-k-1}}{(-1)^k(k^2+4)e^{-k}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{[(1+\frac{1}{k})^2 + \frac{4}{k^2}]e^{-1}}{1+\frac{4}{k^2}} = e^{-1}.$$

Suppenemissäde on $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{e^{-1}} = e$, joten tutkittava potenssisarja varmasti suppenee, kun $|t| = |x-1| < e$, $-e < t = x - 1 < e$, $-e+1 < x < e+1$.

c)

Lasketaan raja-arvo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{e}{(k+1)\ln(k+1)}}{\frac{e}{k\ln(k)}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k\ln(k)}{(k+1)\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \cdot \frac{\ln(k)}{\ln(k+1)} = 1, \end{aligned}$$

sillä jos tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}, \ x \geq 2,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x}) = 1.$$

Suppenemissäde on $R = \frac{1}{L} = 1$, joten tutkittava potenssisarja varmasti suppenee, kun $|x| < 1$, $-1 < x < 1$.

d)

Olkoon $t = x + 3$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k!}}{\sqrt{2k+1}} t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{(k+1)!}}{\sqrt{2k+3}}}{\frac{2^{k!}}{\sqrt{2k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k!(k+1)}\sqrt{2k+1}}{2^{k!}\sqrt{2k+3}} = \lim_{k\to\infty} 2^{k!k} \sqrt{\frac{2+\frac{1}{k}}{2+\frac{3}{k}}} = \infty.$$

Suppenemissäde on $R = \frac{1}{L} = 0$ ja potenssisarja varmasti suppenee, kun $t = x + 3 = 0$, $x = -3$ (yksi piste).

Esimerkki 2.3.1.2. Olkoon $a \neq 0$ reaaliluku. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{a^k}(x-a)^k.$$

a) Laske potenssisarjan suppenemissäde R_a.
b) Millä reaaliluvun $a \neq 0$ arvoilla potenssisarjan suppenemissäde $R_a = 4$?
c) Millä reaaliluvun x arvoilla potenssisarja varmasti suppenee?
Ratkaisu:
a)
Olkoon $t = x - a$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k+1}{a^k} t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2(k+1)+1}{a^{k+1}} : \frac{2k+1}{a^k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2k+3}{a^{k+1}} \cdot \frac{a^k}{2k+1} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2k+3}{(2k+1)a} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2 + \frac{3}{k}}{(2 + \frac{1}{k})a} \right| = \frac{1}{|a|}.$$

Suppenemissäde $R_a = \dfrac{1}{L} = |a|$.
b)
$R_a = 4$, $|a| = 4$, $a = \pm 2$
c)
Tutkittava potenssisarja suppenee varmasti, kun $|t| = |x-a| < |a|$, $-|a| < t = x-a < |a|$, $a-|a| < x < a+|a|$.