LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 2.2.2.1. Tutki sarjojen a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{4k^2}}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{4k^4+1}$ suppenemista.

Ratkaisu:
a)
Integraalitesti: Tarkastellaan funktiota $f(x) = xe^{-4x^2}$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x) = xe^{-4x^2} > 0$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = e^{-4x^2} + xe^{-4x^2}(-8x) = e^{-4x^2}(1-8x^2) < 0$, kun $x \geq 1$.
Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} xe^{-4x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} xe^{-4x^2}\,dx = -\frac{1}{8} \lim_{M\to\infty} \Big/_{1}^{M} e^{-4x^2} = -\frac{1}{8} \lim_{M\to\infty} (e^{-4M^2} - e^{-4}) = \frac{1}{8e^4} < \infty.$$

Sarja suppenee integraalitestin nojalla.
b)
Integraalitesti: Tarkastellaan funktiota $f(x) = \frac{x^3}{4x^4+1}$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x) = \frac{x^3}{4x^4+1} > 0$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = \frac{3x^2(4x^4+1) - 16x^3 \cdot x^3}{(4x^4+1)^2} = \frac{x^2(3-4x^4)}{(4x^4+1)^2} < 0$, kun $x \geq 1$.
Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x^3}{4x^4+1}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} \frac{1}{16} \ln(4x^4+1) = \infty.$$

Sarja hajaantuu integraalitestin nojalla.

Esimerkki 2.2.2.2. Tutki sarjojen a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{3k^7+2}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k}}{2k-1}$ suppenemista.

Ratkaisu:
a)
Vertailuperiaate:

$$0 < \frac{3k^2}{3k^7+2} < \frac{3k^2}{3k^7} = \frac{1}{k^5}$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ suppenee ($p = 5 > 1$), joten tutkittava sarja suppenee vertailuperiaatteen nojalla.
b)
Vertailuperiaate:

$$\frac{2\sqrt{k}}{2k-1} > \frac{2\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} > 0$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ hajaantuu ($0 < p = \frac{1}{2} \leq 1$), joten tutkittava sarja hajaantuu vertailuperiaatteen nojalla.

Esimerkki 2.2.2.3. Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}$$

suppenemista kahden eri suppenemistestin avulla.
Ratkaisu:
Integraalitesti: Tarkastellaan funktiota $f(x) = 2(2x-1)^{-1}$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x) = 2(2x-1)^{-1} > 0$, kun $x \geq 1$.
Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = -2(2x-1)^{-2}2 = -4(2x-1)^{-2} < 0$, kun $x \geq 1$.
Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{2}{2x-1}\,dx = \Big/_1^{\infty} \ln|2x-1| = \infty.$$

Sarja hajaantuu integraalitestin nojalla.

Vertailuperiaate:

$$\frac{2}{2k-1} > \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu ($0 < p = 1 \leq 1$), joten tutkittava sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}$ hajaantuu vertailuperiaatteen nojalla.