LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 4.5.3.1. Olkoon pinta S se osa paraboloidipintaa $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$, joka on kolmion $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 4x\}$ yläpuolella. Olkoon edelleen ∂S pinnan S suljettu reunakäyrä. Määrää pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}^0$ ja laske käyräintegraalin

$$\oint_{\partial S} (3y + 2z^2)\, dx + 3x\, dy + 6xz\, dz$$

arvo Stokesin lauseen avulla.
Ratkaisu: Koska $f_x(x,y) = 2x$ ja $f_y(x,y) = 2y$, niin annetun avoimen funktiopinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori

$$\vec{n}^0 = \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Koska edelleen $\vec{F}(x,y,z) = (3y + 2z^2, 3x, 6xz)$, niin

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y + 2z^2 & 3x & 6xz \end{vmatrix} = (0 - 0, -(6z - 4z), 3 - 3) = (0, -2z, 0).$$

Stokesin lauseen mukaan

$$\oint_{\partial S} (3y + 2z^2)\, dx + 3x\, dy + 6xz\, dz = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}^0\, dS = \iint_S (0, -2z, 0) \cdot \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\, dS$$

$$= \iint_S \frac{4yz}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\, dS = \iint_A \frac{4y(x^2 + y^2 + 3)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA = \int_0^1 \int_x^{4x} 4y(x^2 + y^2 + 3)^1\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big/_{x}^{4x} (x^2 + y^2 + 3)^2\, dx = \int_0^1 [(17x^2 + 3)^2 - (2x^2 + 3)^2]\, dx = \int_0^1 (285x^4 + 90x^2)\, dx = \Big/_0^1 (57x^5 + 30x^3) = 87.$$

Esimerkki 4.5.3.2. Olkoon S se osa tasopintaa $z = f(x,y) = 2x + 3y + 11$, jota rajoittaa suljettu reunakäyrä

$$\partial S : \vec{x}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + (4\cos t + 6\sin t + 11)\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Pinnan S projektio xy-tasossa on alue

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Laske käyräintegraalin

$$\oint_{\partial S} 2yz\, dx + 30x\, dy + xy\, dz$$

arvo

a) käyrän ∂S parametriesityksen,

b) Stokesin lauseen ja napakoordinaattien avulla.

Ratkaisu:

a) Koska $\vec{x}'(t) = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + (-4\sin t + 6\cos t)\vec{k}$, niin

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\partial S} 2yz\,dx + 30x\,dy + xy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} [(4\sin t(4\cos t + 6\sin t + 11))(-2\sin t) + (60\cos t)(2\cos t) + (4\cos t\sin t)(-4\sin t + 6\cos t)]\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-32\sin^2 t\cos t - 48\sin^3 t - 88\sin^2 t + 120\cos^2 t - 16\cos t\sin^2 t + 24\cos^2 t\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-32\sin^2 t\cos t - 48\sin t(1-\cos^2 t) - 88(1-\cos^2 t) + 120\cos^2 t - 16\cos t\sin^2 t + 24\cos^2 t\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-48\sin^2 t\cos t - 48\sin t - 88 + 208\cos^2 t + 72\cos^2 t\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-48\cos t\sin^2 t - 48\sin t + 72\sin t\cos^2 t + 16 + 104\cos(2t))\,dt \\
&= \Big/_0^{2\pi} (-16\sin^3 t + 48\cos t - 24\cos^3 t + 16t + 52\sin(2t)) = 32\pi.
\end{aligned}
$$

b) Koska $f_x(x,y) = 2$ ja $f_y(x,y) = 3$, niin annetun pinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori

$$\vec{n}^0 = \frac{-f_x(x,y)\vec{i} - f_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}}.$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2yz & 30x & xy \end{vmatrix} = (x-0)\vec{i} - (y-2y)\vec{j} + (30-2z)\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (30-2z)\vec{k}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}^0\,dS &= \iint_S (x, y, 30-2z) \cdot \frac{(-2,-3,1)}{\sqrt{14}}\,dS \\
&= \iint_S \frac{-2x - 3y + 30 - 2z}{\sqrt{14}}\,dS \\
&= \iint_A \frac{-2x - 3y + 30 - 2(2x + 3y + 11)}{\sqrt{14}}\sqrt{14}\,dA \\
&= \iint_A (-2x - 3y + 30 - 4x - 6y - 22)\,dA = \iint_A (-6x - 9y + 8)\,dA.
\end{aligned}
$$

Napakoordinaatistossa
$$A' = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$
joten
$$\begin{aligned}
\iint_A (-6x - 9y + 8)\, dA &= \iint_{A'} (-6r\cos\varphi - 9r\sin\varphi + 8)\, r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-6r^2\cos\varphi - 9r^2\sin\varphi + 8r)\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big/_0^2 (-2r^3\cos\varphi - 3r^3\sin\varphi + 4r^2)\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (-16\cos\varphi - 24\sin\varphi + 16)\, d\varphi \\
&= \Big/_0^{2\pi} (-16\sin\varphi + 24\cos\varphi + 16\varphi) = 32\pi.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.4.1. Olkoon
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2x,\ 0 \le z \le 6xy\}$$
suljettu kappale. Laske divergenssilauseen avulla vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = (5x - 3xy + 8xz)\vec{i} + (5xz - 5y - 7)\vec{j} + (6xy + 3yz + z^2)\vec{k}$ vuo kappaleen V pinnan S läpi.

Ratkaisu:
$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0\, dS &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(5x - 3xy + 8xz) + \frac{\partial}{\partial y}(5xz - 5y - 7) + \frac{\partial}{\partial z}(6xy + 3yz + z^2) \right) dV \\
&= \iiint_V (5 - 3y + 8z - 5 + 3y + 2z)\, dV \\
&= \iiint_V 10z\, dV = \int_1^3 \int_0^{2x} \int_0^{6xy} 10z\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_1^3 \int_0^{2x} \Big/_0^{6xy} 5z^2\, dy\, dx = 5 \int_1^3 \int_0^{2x} 36x^2y^2\, dy\, dx \\
&= 5 \int_1^3 \Big/_0^{2x} 12x^2y^3\, dx = 480 \int_1^3 x^5\, dx = 58240
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.4.2. Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa pallopinta $z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ja alhaalta paraboloidipinta $z = g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$. Laske divergenssilauseen ja sylinterikoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (23xz - 5yz)\vec{i} + (6xz + 25yz - 17y)\vec{j} + (3xy - 19z)\vec{k}$ vuo kappaleen V pinnan läpi.

Ratkaisu:
Kappale V voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla seuraavasti:
$V' = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r^2 - 25 \leq z \leq \sqrt{25 - r^2}\}$.
Divergenssilauseen nojalla saadaan laskettua vuo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \iiint_V (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (23xz - 5yz, 6xz + 25yz - 17y, 3xy - 19z) \, dV$$

$$= \iiint_V (23z + 25z - 17 - 19) \, dV = \iiint_V (48z - 36) \, dV = \iiint_{V'} (48z - 36) \, r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_{r^2-25}^{\sqrt{25-r^2}} (48z - 36) \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \Big/_{r^2-25}^{\sqrt{25-r^2}} (24rz^2 - 36rz) \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 [24r(25 - r^2) - 36r(25 - r^2)^{\frac{1}{2}} - 24r(r^2 - 25)^2 + 36r(r^2 - 25)] \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big/_0^5 [-6(25 - r^2)^2 + 12(25 - r^2)^{\frac{3}{2}} - 4(r^2 - 25)^3 + 9(r^2 - 25)^2] \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} [6 \cdot 25^2 - 12 \cdot 25^{\frac{3}{2}} + 4(-25)^3 - 9(-25)^2] \, d\varphi = -131750\pi.$$

Esimerkki 4.5.4.3. Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa taso $z = 0$ sekä alhaalta ja sivuilta pallopinta $z = f(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Laske divergenssilauseen ja pallokoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (2x - 3xz + 2y)\vec{i} + (6x - 2y + 3yz)\vec{j} + (12xyz^2 - 4xy)\vec{k}$ vuo suljetun kappaleen V pinnan S läpi.

Ratkaisu: Lasketaan vuo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

$$= \iiint_V (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (2x - 3xz + 2y, 6x - 2y + 3yz, 12xyz^2 - 4xy) \, dV$$

$$= \iiint_V (2 - 3z - 2 + 3z + 24xyz) \, dV = \iiint_V 24xyz \, dV.$$

Siirrytään pallokoordinaatistoon, jossa $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$ ja

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Siis

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V 24xyz\,dV &= \iiint\limits_{V'} 24\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^2 24\rho^5\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\Big/_{\!0}^{2} 4\rho^6\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\Big)\,d\theta\,d\varphi \\
&= 64\int_0^{2\pi}\Big(\Big/_{\!\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\cos\varphi\sin\varphi\Big)\,d\varphi \\
&= -64\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = -64\Big/_{\!0}^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\varphi = 0.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 4.5.4.4. Olkoon V suljettu kappale, jonka pinta on $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, missä $S_1 : z = f(x,y) = 0$ (taso), $S_2 : z = g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (pallopinta) ja $S_3 : z = h(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ (pallopinta). Näiden pintojen projektiot xy-tasossa ovat vastaavasti $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ (ympyrärengas), $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ (ympyrä) ja $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x^2+y^2 \le 4\}$ (ympyrä). Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$ vuo suljetun kappaleen V pinnan S läpi

a) pintaintegraalina napakoordinaattien avulla,

b) divergenssilauseen ja pallokoordinaattien avulla.

Ratkaisu:

a) Koska V on suljettu kappale, pintojen S_1, S_2 ja S_3 ulkoiset yksikkönormaalivektorit ovat

$$
\begin{aligned}
S_1 : \vec{n}_1^0 &= \frac{f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}} = \frac{0\vec{i}+0\vec{j}-1\vec{k}}{1+0^2+0^2} \\
&= -\vec{k} = (0,0,-1), \\
S_2 : \vec{n}_2^0 &= \frac{g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}} \\
&= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}} = \frac{-x\vec{i} - y\vec{j} - \sqrt{1-x^2-y^2}\vec{k}}{\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}} \\
&= -x\vec{i} - y\vec{j} - \sqrt{1-x^2-y^2}\vec{k} = (-x,-y,-\sqrt{1-x^2-y^2}), \\
S_3 : \vec{n}_3^0 &= \frac{-h_x(x,y)\vec{i} - h_y(x,y)\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{1+[h_x(x,y)]^2+[h_y(x,y)]^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}})^2}} \\
&= \frac{1}{2}x\vec{i} + \frac{1}{2}y\vec{j} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}\vec{k} = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\vec{n}^0\,dS = \iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1^0\,dS + \iint\limits_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_2^0\,dS + \iint\limits_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}_3^0\,dS \\
&= \iint\limits_{S_1} (3x,3y,2z^2)\cdot(0,0,-1)\,dS + \iint\limits_{S_2} (3x,3y,2z^2)\cdot(-x,-y,-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dS \\
&\quad + \iint\limits_{S_3} (3x,3y,2z^2)\cdot(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2})\,dS \\
&= \iint\limits_{S_1} (-2z^2)\,dS + \iint\limits_{S_2} (-3x^2-3y^2-2z^2\sqrt{1-x^2-y^2})\,dS \\
&\quad + \iint\limits_{S_3} \frac{1}{2}(3x^2+3y^2+2z^2\sqrt{4-x^2-y^2})\,dS \\
&= \iint\limits_{A_1} 0\,dA + \iint\limits_{A_2} (-3x^2-3y^2-2(\sqrt{1-x^2-y^2})^2\sqrt{1-x^2-y^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dA \\
&\quad + \iint\limits_{A_3} \frac{1}{2}(3x^2+3y^2+2(\sqrt{4-x^2-y^2})^2\sqrt{4-x^2-y^2})\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dA \\
&= \iint\limits_{A_2} [-3(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(1-x^2-y^2)]\,dA \\
&\quad + \iint\limits_{A_3} [3(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(4-x^2-y^2)]\,dA \\
&= \iint\limits_{A_2'} [-3r^2(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(1-r^2)]\,r\,dr\,d\varphi + \iint\limits_{A_3'} [3r^2(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(4-r^2)]\,r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} [-3r^2(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(1-r^2)]\,r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{2} [3r^2(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(4-r^2)]\,r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} [\underbrace{3r^2}_{u}\underbrace{(-r(1-r^2)^{-\frac{1}{2}})}_{v'} - 2r(1-r^2)]\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{2} [\underbrace{3r^2}_{f}\underbrace{r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}}_{g'} + 2r(4-r^2)]\,dr\,d\varphi \\
&\overset{\text{os.int.}}{=} \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{1} [\underbrace{3r^2}_{u}\underbrace{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}_{v} + \frac{1}{2}(1-r^2)^2]\,d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \underbrace{6r}_{u'}\underbrace{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}_{v}\,dr\,d\varphi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{2} [\underbrace{3r^2}_{f}\underbrace{(-(4-r^2)^{\frac{1}{2}})}_{g} - \frac{1}{2}(4-r^2)^2]\,d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \underbrace{6r}_{f'}\underbrace{(-(4-r^2)^{\frac{1}{2}})}_{g}\,dr\,d\varphi \\
&= \Big/_{0}^{2\pi} (-\frac{1}{2}\varphi) + \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{1} 2(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi + \Big/_{0}^{2\pi} 8\varphi - \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{2} 2(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi \\
&= -\pi - 4\pi + 16\pi + 32\pi = 43\pi
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan vuo divergenssilauseen ja pallokoordinaattien avulla:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\vec{n}^0\,dS &= \iiint\limits_{V} \nabla\cdot\vec{F}\,dV \\
&= \iiint\limits_{V} (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(3x,3y,2z^2)\,dV \\
&= \iiint\limits_{V} (3+3+4z)\,dV = \iiint\limits_{V} (6+4z)\,dV.
\end{aligned}
$$

Siirrytään pallokoordinaatistoon, jossa $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$ ja

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} (5 + 4z)\, dV &= \iiint\limits_{V'} (6 + 4\rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (6\rho^2 \sin\theta + 4\rho^3 \cos\theta \sin\theta)\, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bigg/_{1}^{2} (2\rho^3 \sin\theta + \rho^4 \cos\theta \sin\theta)\, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (14 \sin\theta + 15 \cos\theta \sin\theta)\, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \bigg/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-14 \cos\theta + \frac{15}{2} \sin^2\theta)\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \bigg/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (14 + \frac{15}{2})\, d\varphi \\
&= \bigg/_{0}^{2\pi} \frac{43}{2} \varphi = 43\pi.
\end{aligned}$$