LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 4.5.2.1. Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$, joka on tasoalueen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$ yläpuolella.
a) Määrää pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}^0$.
b) Laske vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = (yz - 6)\vec{i} + (3 - xz)\vec{j} + 12z\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.
Ratkaisu:
a) Annetun avoimen funktiopinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori

$$\vec{n}^0 = \frac{-f_x(x, y)\vec{i} - f_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

b) Lasketaan vuo:

$$\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_S (yz - 6, 3 - xz, 12z) \cdot \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS \\
&= \iint_S \frac{-2xyz + 12x - 6y + 2xyz + 12z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS = \iint_S \frac{12x - 6y + 12z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS \\
&= \iint_A \frac{12x - 6y + 12(x^2 + y^2 + 4)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \\
&= \int_1^2 \int_0^{2x} (12x - 6y + 12x^2 + 12y^2 + 48) \, dy \, dx = \int_1^2 \Big/_0^{2x} (12xy - 3y^2 + 12x^2y + 4y^3 + 48y) \, dx \\
&= \int_1^2 (12x^2 + 56x^3 + 96x) \, dx = \Big/_1^2 (4x^3 + 14x^4 + 48x^2) = 382.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.2.2. Olkoon V suljettu kappale, jonka pinta on $S = S_1 \cup S_2$, missä

$$\begin{aligned} S_1 &: z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \text{(pallopinta)} \\ S_2 &: z = g(x,y) = 0. \quad \text{(taso)} \end{aligned}$$

Näiden pintojen ulkoiset yksikkönormaalivektorit ovat

$$\begin{aligned} S_1 : \vec{n}_1^0 &= \frac{-f_x(x,y)\vec{i} - f_y(x,y)\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}} = \frac{x}{3}\vec{i} + \frac{y}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2 - y^2}\vec{k} \\ &= (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2 - y^2}), \\ S_2 : \vec{n}_2^0 &= \frac{g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}} = -\vec{k} = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

sekä projektio xy-tasossa ympyrä $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = 6y\vec{i} - 6x\vec{j} + 6z^2\vec{k}$ vuo suljetun kappaleen V pinnan $S = S_1 \cup S_2$ läpi napakoordinaattien avulla.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{vuo} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1^0 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2^0 \, dS \\ &= \iint_{S_1} (6y, -6x, 6z^2) \cdot (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2 - y^2}) \, dS \\ &\quad + \iint_{S_2} (6y, -6x, 6z^2) \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= \iint_{S_1} (2xy - 2xy + 2z^2\sqrt{9 - x^2 - y^2}) \, dS + \iint_{S_2} (-6z^2) \, dS \\ &= \iint_{S_1} 2z^2\sqrt{9 - x^2 - y^2} \, dS + \iint_{S_2} (-6z^2) \, dS \\ &= \iint_A 2(\sqrt{9 - x^2 - y^2})^2 \sqrt{9 - x^2 - y^2} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dA + \iint_A (-6)0^2 1 \, dA \\ &= \iint_A 6(9 - x^2 - y^2) \, dA = \iint_{A'} 6(9 - r^2)^1 \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \Big/_0^3 [-\frac{3}{2}(9 - r^2)^2] \, d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{3}{2}(0 - 9^2) \, d\varphi = 243\pi \end{aligned}$$