LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 4.4.2.1. Olkoon C käyrä $y = f(x) = 2x\cos(\pi x^6)$, $0 \le x \le 1$. Laske käyräintegraali

$$\int_C (6xy - y^3 + 9x^2)\,dx + (3x^2 - 3xy^2 - 2y)\,dy.$$

Ratkaisu: Vektorikenttä $\vec{F}(x,y) = (6xy - y^3 + 9x^2)\vec{i} + (3x^2 - 3xy^2 - 2y)\vec{j}$ on konservatiivinen, sillä

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ 6xy - y^3 + 9x^2 & 3x^2 - 3xy^2 - 2y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0-0, 0-0, 6x - 3y^2 - (6x - 3y^2)) = \vec{0} \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

On olemassa potentiaalifunktio $U = U(x,y)$ siten, että $\vec{F} = \nabla U$ eli kentän komponentit ovat potentiaalifunktion osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} U_x(x,y) &\overset{(1)}{=} 6xy - y^3 + 9x^2, \\ U_y(x,y) &\overset{(2)}{=} 3x^2 - 3xy^2 - 2y. \end{aligned}$$

Lasketaan potentiaalifunktio:

$$\begin{aligned} (1): \qquad U(x,y) &= \textstyle\int (6xy - y^3 + 9x^2)\,dx \\ &= 3x^2y - xy^3 + 3x^3 + A(y) \\ U_y &= 3x^2 - 3xy^2 + A'(y) \overset{(2)}{=} 3x^2 - 3xy^2 - 2y \\ & \quad A'(y) = -2y \qquad\qquad A(y) = \textstyle\int(-2y)\,dy = -y^2 + C \\ U(x,y) &= 3x^2y - xy^3 + 3x^3 - y^2 + C. \end{aligned}$$

Käyräintegraali on tiestä riippumaton ja sen arvon voi laskea potentiaalifunktion avulla. Käyrän C alkupiste $(0, f(0)) = (0,0)$ ja loppupiste $(1, f(1)) = (1,-2)$.

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{x} &= \int_C (6xy - y^3 + 9x^2)\,dx + (3x^2 - 3xy^2 - 2y)\,dy = U(1,-2) - U(0,0) \\ &= 3\cdot 1^2(-2) - 1(-2)^3 + 3\cdot 1^3 - (-2)^2 + C - (0 - 0 + 0 - 0 + C) = 1.\end{aligned}$$

Esimerkki 4.4.2.2. Laske käyräintegraali

$$\int_C (4xy - 3y^3z)\,dx + (2x^2 - 9xy^2z - 8y^3)\,dy + (-3xy^3 + 12z)\,dz,$$

kun C on käyrä $\vec{x}(t) = \ln(t^3)\vec{i} + (2 - \ln(t))\vec{j} - 4\ln(t)\vec{k}$, $e^{-1} \le t \le e$. Miksi em. käyräintegraalin arvo on nolla, jos C on käyrä $\vec{x}(s) = \cos(s)\vec{i} + \sin(s)\vec{j} + (3\cos(s) + 4\sin(s) + 1)\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$?
Ratkaisu: Esimerkissä 4.3.2. on todettu, että vektorikenttä $\vec{F}(x,y,z) = (4xy - 3y^3z)\vec{i} + (2x^2 - 9xy^2z - 8y^3)\vec{j} + (-3xy^3 + 12z)\vec{k}$ on konservatiivinen. Tämän vektorikentän potentiaalifunktio $U(x,y,z) = 2x^2y - 3xy^3z - 2y^4 + 6z^2 + C$. Käyräintegraali on tiestä riippumaton ja sen arvon voi laskea potentiaalifunktion avulla. Käyrän C alkupiste $\vec{x}(e^{-1}) = \ln(e^{-3})\vec{i} + (2 - \ln(e^{-1}))\vec{j} - 4\ln(e^{-1})\vec{k} = (-3,3,4)$ ja loppupiste $\vec{x}(e) = \ln(e^3)\vec{i} + (2 - \ln(e))\vec{j} - 4\ln(e)\vec{k} = (3,1,-4)$.

$$\begin{aligned}&\int_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_C (4xy - 3y^3z)\,dx + (2x^2 - 9xy^2z - 8y^3)\,dy + (-3xy^3 + 12z)\,dz \\ &= U(3,1,-4) - U(-3,3,4) \\ &= 2\cdot 3^2 1 - 3\cdot 3\cdot 1^3(-4) - 2\cdot 1^4 + 6(-4)^2 + C - (2(-3)^2\cdot 3 - 3(-3)\cdot 3^3 4 - 2\cdot 3^4 + 6\cdot 4^2 + C) \\ &= -812.\end{aligned}$$

Jos käyrä C on $\vec{x}(s) = \cos(s)\vec{i} + \sin(s)\vec{j} + (3\cos(s) + 4\sin(s) + 1)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, niin käyrän alkupiste $\vec{x}(0) = \cos(0)\vec{i} + \sin(0)\vec{j} + (3\cos(0) + 4\sin(0) + 1)\vec{k} = (1, 0, 4)$ ja loppupiste $\vec{x}(2\pi) = \cos(2\pi)\vec{i} + \sin(2\pi)\vec{j} + (3\cos(2\pi) + 4\sin(2\pi) + 1)\vec{k} = (1, 0, 4)$. Käyrä on siis suljettu ja

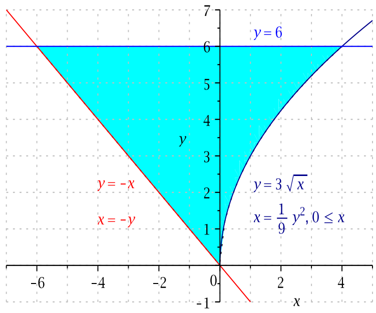
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_C (4xy - 3y^3 z)\, dx + (2x^2 - 9xy^2 z - 8y^3)\, dy + (-3xy^3 + 12z)\, dz = U(1, 0, 4) - U(1, 0, 4) = 0.$$

Esimerkki 4.4.3.1. Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial A} (5x^4 - 4y)\, dx + x^2 y\, dy,$$

kun ∂A muodostuu seuraavasti: pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(4, 6)$ käyrä $y = 3\sqrt{x}$, pisteestä $(4, 6)$ pisteeseen $(-6, 6)$ suora $y = 6$, pisteestä $(-6, 6)$ pisteeseen $(0, 0)$ suora $y = -x$. Piirrä kuva suljetun reunakäyrän ∂A sisään sulkemasta tasoalueesta A.

Ratkaisu:
Suljetun käyrän ∂A sisään sulkema alue A voidaan kuvata muodossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 6, -y \leq x \leq \frac{1}{9}y^2\}$.



$$\oint_{\partial A} (5x^4 - 4y)\, dx + x^2 y\, dy$$

$$= \iint_A \left[\frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} - \frac{\partial(5x^4 - 4y)}{\partial y}\right] dA$$

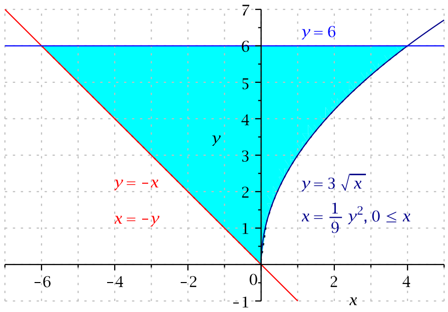
$$= \iint_A (2xy + 4)\, dA = \int_0^6 \int_{-y}^{\frac{1}{9}y^2} (2xy + 4)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \Big/_{-y}^{\frac{1}{9}y^2} (x^2 y + 4x)\, dy = \int_0^6 \left(\frac{y^5}{81} + \frac{4y^2}{9} - y^3 + 4y\right) dy$$

$$= \Big/_0^6 \left(\frac{y^6}{486} + \frac{4y^3}{27} - \frac{y^4}{4} + 2y^2\right) = \frac{6^6}{486} + \frac{4 \cdot 6^3}{27} - \frac{6^4}{4} + 2 \cdot 6^2$$

$$= -124$$

TAI



$$\oint_{\partial A} (5x^4 - 4y)\,dx + x^2 y\,dy$$

$$= \iint_A (2xy+4)\,dA$$

$$= \iint_{A_1} (2xy+4)\,dA + \iint_{A_2} (2xy+4)\,dA$$

$$= \int_{-6}^{0}\int_{-x}^{6} (2xy+4)\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{3\sqrt{x}}^{6} (2xy+4)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-6}^{0} \Big/_{-x}^{6} (xy^2+4y)\,dx + \int_{0}^{4} \Big/_{3\sqrt{x}}^{6} (xy^2+4y)\,dx$$

$$= \int_{-6}^{0} (36x + 24 - x^3 + 4x)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{4} (36x + 24 - 9x^2 - 12x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \Big/_{-6}^{0} (20x^2 + 24x - \frac{1}{4}x^4)$$

$$+ \Big/_{0}^{4} (18x^2 + 24x - 3x^3 - 8x^{\frac{3}{2}})$$

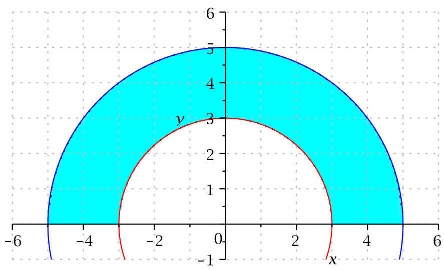
$$= -20(-6)^2 - 24(-6) + \frac{1}{4}(-6)^4$$

$$+ 18\cdot 4^2 + 24\cdot 4 - 3\cdot 4^3 - 8\cdot 4^{\frac{3}{2}} = -124$$

Esimerkki 4.4.3.2. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suoran $y=0$ sekä x-akselin yläpuolella olevien ympyrän kaarien $y=\sqrt{9-x^2}$ ja $y=\sqrt{25-x^2}$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A sekä laske Greenin lauseen ja napakoordinaattien avulla

$$\oint_{\partial A}(10x^4y^2-6y+3)\,dx+(11x^5y-3x^2-6)\,dy.$$

Ratkaisu:
Greenin lauseen ja napakoordinaattien avulla saadaan



$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial A}(10x^4y^2-6y+3)\,dx+(11x^5y-3x^2-6)\,dy\\
&=\iint_A\Big[\frac{\partial(11x^5y-3x^2-6)}{\partial x}-\frac{\partial(10x^4y^2-6y+3)}{\partial y}\Big]\,dA\\
&=\iint_A[55x^4y-6x-(20x^4y-6)]\,dA\\
&=\iint_A(35x^4y-6x+6)\,dA\\
&=\int_0^\pi\int_3^5(35r^4\cos^4(\varphi)r\sin(\varphi)-6r\cos(\varphi)+6)\,r\,dr\,d\varphi\\
&=\int_0^\pi\int_3^5(35r^6\sin(\varphi)\cos^4(\varphi)-6r^2\cos(\varphi)+6r)\,dr\,d\varphi\\
&=\int_0^\pi\Big/_3^5(5r^7\sin(\varphi)\cos^4(\varphi)-2r^3\cos(\varphi)+3r^2)\,d\varphi\\
&=\int_0^\pi(379690\sin(\varphi)\cos^4(\varphi)-196\cos(\varphi)+48)\,d\varphi\\
&=\Big/_0^\pi(-75938\cos^5(\varphi)-196\sin(\varphi)+48\varphi)=151876+48\pi.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.1.1. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = x$, $y = 0$ ja $x = 1$ leikatessa toisensa. Laske pintaintegraali

$$\iint_S 4z\sqrt{x^2+y^2+1}\,dS,$$

kun S on se osa funktiopintaa $z = f(x,y) = xy$, joka jää tasoalueen A yläpuolelle.
Ratkaisu: Alue A voidaan kuvata muodossa

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Koska $f_x(x,y) = y$ ja $f_y(x,y) = x$, niin

$$\begin{aligned}
&\iint_S 4z\sqrt{x^2+y^2+1}\,dS \\
&= \iint_A 4xy\sqrt{x^2+y^2+1}\sqrt{1+y^2+x^2}\,dA = \iint_A 4xy(x^2+y^2+1)\,dA \\
&= \iint_A 4(x^3y+xy^3+xy)\,dA = \int_0^1\int_0^x 4(x^3y+xy^3+xy)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \Big/_0^x (2x^3y^2+xy^4+2xy^2)\,dx = \int_0^1 (2x^5+x^5+2x^3)\,dx \\
&= \int_0^1 (3x^5+2x^3)\,dx = \Big/_0^1 (\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^4) = 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.1.2. Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x,y) = x^2+y^2+10$, joka on ympyrärenkaan osan

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25 \le x^2+y^2 \le 36, x \le 0, y \le 0\}$$

yläpuolella. Laske napakoordinaattien avulla pintaintegraali

$$\iint_S \frac{16(x^2+y^2)}{z-10}\,dS.$$

Ratkaisu: Koska $f_x(x,y) = 2x$ ja $f_y(x,y) = 2y$, niin

$$\iint_S \frac{16(x^2+y^2)}{z-10}\,dS = \iint_A \frac{16(x^2+y^2)}{x^2+y^2+10-10}\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA = \iint_A 16\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA.$$

Siirrytään napakoordinaatistoon. Tällöin $A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \le r \le 6, \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}$, joten

$$\begin{aligned}
&\iint_A 16\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA = \iint_{A'} 16\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\varphi = 2\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\int_5^6 8r(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr\,d\varphi \\
&= 2\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\int_5^6 \frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr\,d\varphi = 2\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \Big/_5^6 \frac{2}{3}(1+4r^2)\sqrt{1+4r^2}\,d\varphi = \frac{4}{3}\Big/_\pi^{\frac{3\pi}{2}}(145\sqrt{145}-101\sqrt{101})\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3}(145\sqrt{145}-101\sqrt{101}).
\end{aligned}$$