LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 4.2.1. Tutki seuraavien vektorikenttien lähteettömyys ja pyörteettömyys, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

a) $\vec{v}(x, y, z) = (5x + 7y + 3z - 2)\vec{\imath} + (7x - 2y - 5z + 9)\vec{\jmath} + (3x - 5y - 3z - 4)\vec{k}$,

b) $\vec{v}(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\vec{\imath} + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\vec{\jmath} + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\vec{k}$.

Ratkaisu:

a) Tutkitaan lähteettömyys:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(5x + 7y + 3z - 2) + \frac{\partial}{\partial y}(7x - 2y - 5z + 9) + \frac{\partial}{\partial z}(3x - 5y - 3z - 4)\\ &= 5 - 2 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Kenttä on lähteetön, sillä divergenssi häviää kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Tutkitaan pyörteettömyys:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 5x + 7y + 3z - 2 & 7x - 2y - 5z + 9 & 3x - 5y - 3z - 4 \end{vmatrix}\\ &= (-5 - (-5))\vec{\imath} - (3 - 3)\vec{\jmath} + (7 - 7)\vec{k}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Kenttä on pyörteetön, sillä roottori häviää kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Tutkitaan lähteettömyys:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}x(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y}y(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z}z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + x^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\\ &\quad + (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + y^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\\ &\quad + (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + z^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} \neq 0.\end{aligned}$$

Kenttä ei ole lähteetön.

Tutkitaan pyörteettömyys:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} & y(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} & z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}\\ &= (yz(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - zy(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}})\vec{\imath}\\ &\quad -(xz(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - zx(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}})\vec{\jmath}\\ &\quad +(xy(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - yx(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}})\vec{k}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Kenttä on pyörteetön, sillä roottori häviää kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Esimerkki 4.3.1. Osoita, että vektorikenttä

$$\vec{F}(x,y) = (9x^2y^2 - 10xy - 4x^3)\vec{\imath} + (6x^3y - 5x^2 + 14y)\vec{\jmath}$$

on konservatiivinen ja määrää potentiaalifunktio $U(x,y)$.
Ratkaisu: Vektorikenttä $\vec{F}(x,y) = (9x^2y^2 - 10xy - 4x^3)\vec{\imath} + (6x^3y - 5x^2 + 14y)\vec{\jmath}$ on konservatiivinen, sillä

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ 9x^2y^2 - 10xy - 4x^3 & 6x^3y - 5x^2 + 14y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0-0, 0-0, 18x^2y - 10x - (18x^2y - 10x)) = \vec{0} \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On olemassa potentiaalifunktio $U = U(x,y)$ siten, että $\vec{F} = \nabla U$ eli kentän komponentit ovat potentiaalifunktion osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} U_x(x,y) &\overset{(1)}{=} 9x^2y^2 - 10xy - 4x^3, \\ U_y(x,y) &\overset{(2)}{=} 6x^3y - 5x^2 + 14y. \end{aligned}$$

Lasketaan potentiaalifunktio:

$$\begin{array}{llll} (1): & U(x,y) & = \int (9x^2y^2 - 10xy - 4x^3)\,dx & \\ & & = 3x^3y^2 - 5x^2y - x^4 + A(y) & \\ & U_y & = 6x^3y - 5x^2 + A'(y) \overset{(2)}{=} 6x^3y - 5x^2 + 14y & \\ & & \quad A'(y) = 14y & A(y) = \int 14y\,dy = 7y^2 + C \\ & U(x,y) & = 3x^3y^2 - 5x^2y - x^4 + 7y^2 + C. & \end{array}$$

Esimerkki 4.3.2. Määrää konservatiivisen vektorikentän

$$\vec{F}(x,y,z) = (4xy - 3y^3z)\vec{\imath} + (2x^2 - 9xy^2z - 8y^3)\vec{\jmath} + (-3xy^3 + 12z)\vec{k}$$

potentiaalifunktio $U(x,y,z)$.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} U_x(x,y,z) &\overset{(1)}{=} 4xy - 3y^3z, \\ U_y(x,y,z) &\overset{(2)}{=} 2x^2 - 9xy^2z - 8y^3, \\ U_z(x,y,z) &\overset{(3)}{=} -3xy^3 + 12z. \end{aligned}$$

Lasketaan potentiaalifunktio:

$$\begin{array}{lllll} (1): & U(x,y,z) & = & \int (4xy - 3y^3z)\,dx & \\ & & = & 2x^2y - 3xy^3z + A(y,z) & \\ & U_y & = & 2x^2 - 9xy^2z + \frac{\partial A}{\partial y}(y,z) & \\ & & \overset{(2)}{=} & 2x^2 - 9xy^2z - 8y^3 & \\ & & & \frac{\partial A}{\partial y}(y,z) = -8y^3 & A(y,z) = \int (-8y^3)\,dy = -2y^4 + B(z) \\ & U(x,y,z) & = & 2x^2y - 3xy^3z - 2y^4 + B(z) & \\ & U_z & = & -3xy^3 + B'(z) & \\ & & \overset{(3)}{=} & -3xy^3 + 12z. & \\ & & & B'(z) = 12z & B(z) = \int 12z\,dz = 6z^2 + C \\ & U(x,y,z) & = & 2x^2y - 3xy^3z - 2y^4 + 6z^2 + C. & \end{array}$$

Esimerkki 4.4.1.1. Laske käyräintegraali

$$\int_C (3x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 - x)\,dy,$$

kun C on käyrä $y = x^3 - 1$ pisteestä $(0,-1)$ pisteeseen $(1,0)$.
Ratkaisu: Annetun funktiokäyrän C parametriesitys on $\vec{x}(t) = t\,\vec{\imath} + (t^3 - 1)\,\vec{\jmath}$, missä muuttujan t rajat ratkeavat yhtälöistä

$$\begin{cases} (t, t^3-1) &= (0,-1), \quad \text{käyrän alkupiste} \\ (t, t^3-1) &= (1,0), \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases} \qquad \begin{cases} t &= 0, \quad \text{käyrän alkupiste} \\ t &= 1. \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases}$$

Siis $0 \le t \le 1$ ja koska $\vec{x}'(t) = 1\,\vec{\imath} + 3t^2\,\vec{\jmath}$, niin

$$\begin{aligned}
&\int_C (3x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 - x)\,dy = \int_0^1 \{[3t^2 + 2t(t^3-1)]1 + [(t^3-1)^2 - t]3t^2\}\,dt \\
&= \int_0^1 \{3t^2 + 2t^4 - 2t + [t^6 - 2t^3 + 1 - t]3t^2\}\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 2t^4 - 2t + 3t^8 - 6t^5 - 3t^3 + 3t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 (3t^8 - 6t^5 + 2t^4 - 3t^3 + 6t^2 - 2t)\,dt = \Big/_0^1 (\tfrac{1}{3}t^9 - t^6 + \tfrac{2}{5}t^5 - \tfrac{3}{4}t^4 + 2t^3 - t^2) \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 2 - 1 = -\frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.4.1.2. Laske käyräintegraali

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x},$$

kun $\vec{F}(x,y,z) = 2xyz\vec{\imath} - 3xy^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}$ on vektorikenttä ja C on käyrä $\vec{x}(t) = \ln(t)\vec{\imath} + 3t\vec{\jmath} - t\vec{k}$ pisteestä $(-1, 3e^{-1}, -e^{-1})$ pisteeseen $(0,3,-1)$.
Ratkaisu: Muuttujan t rajat ratkeavat yhtälöistä

$$\begin{cases} (\ln(t), 3t, -t) &= (-1, 3e^{-1}, -e^{-1}), \quad \text{käyrän alkupiste} \\ (\ln(t), 3t, -t) &= (0,3,-1), \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases} \qquad \begin{cases} t &= e^{-1}, \quad \text{käyrän alkupiste} \\ t &= 1. \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases}$$

Siis $e^{-1} \le t \le 1$ ja koska $\vec{x}'(t) = t^{-1}\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 1\,\vec{k}$, niin

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad &= \quad \int_C (2xyz\vec{\imath} - 3xy^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}) \cdot (dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}) \\
= \quad \int_C 2xyz\,dx - 3xy^2\,dy + yz\,dz \quad &= \quad \int_{e^{-1}}^1 [(-6t^2\ln(t))(t^{-1}) - (27t^2\ln(t))(3) + (-3t^2)(-1)]\,dt \\
= \quad \int_{e^{-1}}^1 (-81t^2 - 6t)\ln(t)\,dt + \Big/_{e^{-1}}^1 t^3 \quad &= \quad \int_{e^{-1}}^1 \underbrace{\ln(t)}_{u}\underbrace{(-81t^2 - 6t)}_{v'}\,dt + 1 - e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{os.int.}}{=} \Big/_{e^{-1}}^1 \underbrace{\ln(t)}_{u}\underbrace{(-27t^3 - 3t^2)}_{v} - \int_{e^{-1}}^1 \underbrace{(t^{-1})}_{u'}\underbrace{(-27t^3 - 3t^2)}_{v}\,dt + 1 - e^{-3}$$

$$= \quad -27e^{-3} - 3e^{-2} - \int_{e^{-1}}^1 (-27t^2 - 3t)\,dt + 1 - e^{-3} = -28e^{-3} - 3e^{-2} - \Big/_{e^{-1}}^1 (-9t^3 - \frac{3}{2}t^2) + 1 = \frac{23e^3 - 9e - 74}{2e^3}.$$

Esimerkki 4.4.1.3. Olkoon $C = C_1 \cup C_2$ suljettu tie siten, että

$$C_1 : \vec{x}_1(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t^2\vec{k}, -1 \leq t \leq 1,$$
$$C_2 : \vec{x}_2(s) = (2-s)\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, 1 \leq s \leq 3.$$

Laske käyräintegraalin

$$\int_C z^2\,dx + y^2\,dy + 10xz\,dz$$

arvo.
Ratkaisu: Koska $\vec{x}_1'(t) = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$ ja $\vec{x}_2'(s) = -\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, niin

$$\begin{aligned}
&\int_C z^2\,dx + y^2\,dy + 10xz\,dz \\
&= \int_{C_1} z^2\,dx + y^2\,dy + 10xz\,dz + \int_{C_2} z^2\,dx + y^2\,dy + 10xz\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} [(t^4)1 + (t^4)2t + (10t^3)2t]\,dt + \int_{1}^{3} [(1)(-1) + (1)(0) + (20-10s)(0)]\,ds \\
&= \int_{-1}^{1} (21t^4 + 2t^5)\,dt + \int_{1}^{3} (-1)\,ds = \Big/_{-1}^{1} (\frac{21}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^6) + \Big/_{1}^{3} (-s) = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$