LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

<u>*Esimerkki 3.9.2.1.*</u> Laske integroimalla sylinterikoordinaattien avulla sen kappaleen tilavuus, jota ylhäältä rajoittaa pallopinta $z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ ja alhaalta taso $z = g(x, y) = 0$.
<u>*Ratkaisu:*</u> Kappale voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla seuraavasti:

$$V' = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 4, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le \sqrt{16 - r^2}\}.$$

Lasketaan integroimalla kappaleen tilavuus:

$$\iiint_V 1\, dV = \iiint_{V'} r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \Big/_{0}^{\sqrt{16-r^2}} rz\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r(16 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{4} (-\frac{1}{3})(16 - r^2)^{\frac{3}{2}}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} 16^{\frac{3}{2}}\, d\varphi = \frac{128\pi}{3}.$$

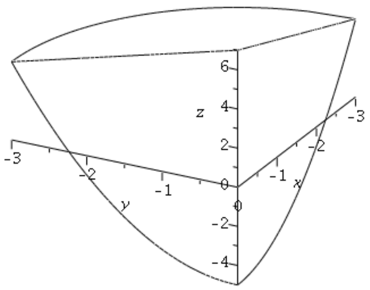
<u>*Esimerkki 3.9.2.2.*</u> Laske sylinterikoordinaattien avulla

$$\int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{x^2+y^2-5}^{7-\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2) z\, dz\, dy\, dx.$$

Hahmottele kuva kappaleesta, jota integrointirajat kuvaavat.
<u>*Ratkaisu:*</u>
Tehtävässä annettu kappale on sylinterikoordinaateissa

$$V' = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 3, \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}, r^2 - 5 \le z \le 7 - r\},$$

joten



$$\int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{x^2+y^2-5}^{7-\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2) z\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^3\int_{r^2-5}^{7-r} r^2 z\, r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^3 \Big(\Big/_{r^2-5}^{7-r} \frac{1}{2} r^3 z^2 \Big)\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^3 \frac{r^3}{2}[(7 - r)^2 - (r^2 - 5)^2]\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}\int_0^3 r^3[49 - 14r + r^2 - (r^4 - 10r^2 + 25)]\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}\int_0^3 (-r^7 + 11r^5 - 14r^4 + 24r^3)\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big(\Big/_{0}^{3} (-\frac{r^8}{8} + \frac{11r^6}{6} - \frac{14r^5}{5} + 6r^4) \Big)\, d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{12879}{80}\, d\varphi = \Big/_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{12879}{80}\varphi = \frac{12879\pi}{160}.$$

Esimerkki 3.9.3.1. Olkoon $R > 0$ reaaliluku. Olkoon edelleen V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa taso $z = f(x, y) = 0$, alhaalta se osa pallopintaa $z = g(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, jolle $x \geq 0$, $y \leq 0$, sekä sivuilta tasot $x = 0$ ja $y = 0$. Laske integroimalla pallokoordinaattien avulla kappaleen V tilavuus.
Ratkaisu: Kappale voidaan kuvata pallokoordinaattien avulla seuraavasti:

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq R, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Lasketaan integroimalla kappaleen tilavuus:

$$\iiint_V 1\,dV = \iiint_{V'} \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^R \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big/_{0}^{R} \frac{\rho^3}{3}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{R^3}{3}(-\cos\theta)\,d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\varphi = \Big/_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{R^3}{3}\varphi = \frac{\pi R^3}{6}.$$

Esimerkki 3.9.3.2. Olkoon suljettu kappale

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\}.$$

Laske pallokoordinaattien avulla

$$\iiint_V \frac{6xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 4}\,dV.$$

Ratkaisu: Annettu kappale pallokoordinaateissa on

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{2} \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}\}.$$

Lasketaan kysytty integraali

$$\iiint_V \frac{6xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 4}\,dV = \iiint_{V'} \frac{6\rho\sin\theta\cos\varphi\,\rho\sin\theta\sin\varphi\,\rho\cos\theta}{(\rho^2)^3 + 4}\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{6\rho^5\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^6 + 4}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big/_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\ln\left|\rho^6 + 4\right|\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi(\ln(31) - \ln(12))\,d\theta\,d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\ln(\frac{31}{12})\frac{\sin^4\theta}{4}\,d\varphi$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\ln(\frac{31}{12})\,d\varphi = \Big/_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{8}\sin^2\varphi\ln(\frac{31}{12}) = \frac{1}{8}\ln(\frac{31}{12}).$$