LUENTOESIMERKIT KEVÄT 2019

Numeroitujen esimerkkien numerot paitsi viimeinen numero viittaavat siihen luentorungon kappaleeseen, jossa esimerkkiin liittyvää asiaa käsitellään.

Esimerkki 1.1. Erään kurssin luennot ovat luennoitsijasta johtuen ikävystyttäviä. Siksi kuulijoiden määrä vähenee joka luentotunnin jälkeen 7%. Montako kuulijaa poistuu luennoitsijan kanssa salista viimeisen luentotunnin jälkeen, kun ensimmäisellä luennolla on 122 kuulijaa ja kurssin kesto on 28 tuntia?

Ratkaisu:

Luentotunnit	Kuulijoiden määrä
0	122
1	$122 - 0.07 \cdot 122 = 0.93^1 \cdot 122$
2	$0.93 \cdot 122 - 0.07 \cdot 0.93 \cdot 122 = 0.93^2 \cdot 122$
3	$0.93^2 \cdot 122 - 0.07 \cdot 0.93^2 \cdot 122 = 0.93^3 \cdot 122$
$\vdots$	$\vdots$
k	$0.93^k \cdot 122$

Viimeisen luentotunnin jälkeen luennoitsijan kanssa salista poistuu $0.93^{28} \cdot 122 \approx 16$ kuulijaa.

Esimerkki 1.2. Olkoon
$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \ldots.$$
Tällöin $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, $a_6 = \frac{1}{6}$, ... Ilmeisesti
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = 0 = a,$$
sillä jos esimerkiksi $\epsilon = \frac{1}{4}$, niin ehto
$$|a_k - a| = |a_k - 0| = |(-1)^k \frac{1}{k}| = \frac{1}{k} < \frac{1}{4}$$
toteutuu aina, kun $k > 4$ ts. kun $k \geq 5 = K$. Vastaavasti, jos $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, niin ehto
$$|a_k - 0| < \epsilon$$
toteutuu aina, kun $k > \frac{1}{\epsilon}$. Luvuksi K valitaan tällöin pienin kokonaisluku, joka on suurempi kuin $\frac{1}{\epsilon}$.

Esimerkki 1.3. Olkoon $a_k = -1 + (-1)^k, k = 1, 2, 3, \ldots$. Tämän lukujonon termit ovat −2, 0, −2, 0, −2, 0, ..., $-1 + (-1)^n$, ..., joten lukujonon arvot ovat vuorotellen joko −2 tai 0. Raja-arvoa ei ole olemassa, joten tämä lukujono hajaantuu.

Esimerkki 1.4. Tutki lukujonon

a) $\left(\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{\sinh(k^2+1)}\right)_{k=1}^{\infty}$, b) $\left(\displaystyle\int_1^{k^2}\frac{e^{2x+k^2}}{k}\,dx\right)_{k=1}^{\infty}$

suppenemista.
Ratkaisu:

a) Tarkastellaan funktiota $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sinh(x^2+1)}$, $x\geq 1$. Koska

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\sinh(x^2+1)}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}2x}{2x\cosh(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cosh(x^2+1)}=0,$$

niin lukujono $\left(\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{\sinh(k^2+1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ suppenee ja raja-arvo on nolla.

b)

$$a_k=\int_1^{k^2}\frac{e^{2x+k^2}}{k}\,dx=\Big/_{1}^{k^2}\frac{e^{2x+k^2}}{2k}=\frac{e^{3k^2}-e^{k^2+2}}{2k}=\frac{e^{k^2}}{2k}(e^{2k^2}-e^2)$$

Tarkastellaan funktiota $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{2x}$, $x\geq 1$. Koska $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{2x}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2}=\infty$, niin $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e^{k^2}}{2k}(e^{2k^2}-e^2)=\infty$. Lukujono $\left(\displaystyle\int_1^{k^2}\frac{e^{2x+k^2}}{k}\,dx\right)_{k=1}^{\infty}$ siis hajaantuu.

Esimerkki 2.1.1. Olkoon $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})_{k=1}^{\infty}$ lukujono. Tutki tämän jonon suppenemista. Muodostetaan lukujonon avulla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$. Tutki tämän sarjan suppenemista.
Ratkaisu: Lukujono suppenee ja sen raja-arvo on nolla, sillä

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=0.$$

Muodostetaan osasummien jono

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=-1+\sqrt{n+1},\ n=1,2,\ldots,\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})=\infty.$$

Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ siis hajaantuu.

Esimerkki 2.1.2. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}4$ hajaantuu.

Ratkaisu: Muodostetaan osasummien jono $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (-1)^{1+1}4 = 4\\
S_2 &= (-1)^{1+1}4 + (-1)^{2+1}4 = 0\\
S_3 &= (-1)^{1+1}4 + (-1)^{2+1}4 + (-1)^{3+1}4 = 4\\
S_4 &= (-1)^{1+1}4 + (-1)^{2+1}4 + (-1)^{3+1}4 + (-1)^{4+1}4 = 0\\
&\vdots\\
S_n &= \begin{cases} 4, & n \text{ pariton}\\ 0, & n \text{ parillinen.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ ei ole olemassa, joten osasummien jono hajaantuu. Tästä seuraa, että myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}4$ hajaantuu.

Esimerkki 2.1.3. Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

suppenemista. Jos sarja suppenee, niin määrää sarjan summa.
Ratkaisu: Osamurtokehitelmä:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}.$$

Tehdään samannimisiksi ja kerrotaan yhtälön molemmat puolet termillä $(k+1)(k+2)$: $1 = (k+2)A + (k+1)B$. Yhdistetään samaa k:n astelukua vastaavat termit yhtälön kummallakin puolella: $(A+B)k + 2A + B = 0k + 1$. Verrataan kertoimia, jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + B = 0\\ 2A + B = 1.\end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on $A = 1$, $B = -1$. Muodostetaan osasummien jono

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2},\ n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

josta saadaan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} = S.$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ suppenee ja sarjan summa $S = \frac{1}{2}$.