031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

1. välikoe 8.2.2024, ratkaisut

1. a) Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{(k^3+2)^2}$. Perustele väitteesi tarkasti. (3p)

b) Määrää potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(k+3)}(x-2)^k$ suppenemissäde. Suppeneeko sarja pisteessä $x = 4$? (3p)

Ratkaisu:
a) Kaikilla $k = 1, 2, \ldots$

$$0 < \frac{2k^2}{(k^3+2)^2} < \frac{2k^2}{(k^3)^2} = \frac{2k^2}{k^6} = \frac{2}{k^4}.$$

Vertailusarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4}$ suppenee, sillä $p = 4 > 1$, joten myös tutkittava sarja suppenee vertailuperiaatteen nojalla.
Tai: Olkoon $f(x) = \frac{2x^2}{(x^3+2)^2}$, $x \geq 1$. Funktio f on jatkuva, positiivinen. Funktio on myös aidosti vähenevä, sillä

$$f'(x) = \frac{4x(x^3+2)^2 - 2(x^3+2)\cdot 3x^2 \cdot 2x^2}{(x^3+2)^4} = \frac{-8x(x^3+2)(1-x)}{(x^3+2)^4} \leq 0,$$

missä yhtäsuuruus saavutetaan vain arvolla $x = 1$. Integraalitestin oletukset ovat voimassa ja

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \int_1^M (2x^2)(x^3+2)^{-2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M -\frac{2}{3}\frac{1}{x^3+2} \\ &= \lim_{M\to\infty} -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{M^3+2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} < \infty,\end{aligned}$$

joten tutkittava sarja suppenee integraalitestin nojalla.

b)

$$\begin{aligned}L &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1+3)} \cdot \frac{3^k(k+3)}{(-1)^k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{1+\frac{3}{k}}{1+\frac{4}{k}} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

joten $R = 3$ ja sarja suppenee varmasti, kun $-3 < x-2 < 3$ eli $-1 < x < 5$. Sarja suppenee pisteessä $x = 4$.

2. a) Funktion f Taylorin polynomi pisteessä x_0 lasketaan kaavalla

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Laske funktiolle $f(x) = \sqrt{2+x}$ Taylorin polynomi $T_2(x)$ kehityskeskuksena $x_0 = 2$. Tässä $f^{(k)}(x_0)$ tarkoittaa funktion f kertalukua k olevaa derivaattaa pisteessä x_0. (4p)

b) Olkoon $z = f(x,y) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{1-x^2-y}}$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Määrää funktion f määritysjoukko. (2p)

Ratkaisu:
a) Nyt

$$f(x) = (2+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(2) = \sqrt{2+2} = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2+x}} \qquad f'(2) = \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2+x)\sqrt{2+x}} \qquad f''(2) = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{32}$$

Funktion f Taylorin toisen asteen polynomi on

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{64}(x-2)^2$$

b)

$$M_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+1>0 \text{ ja } 1-x^2-y>0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>-1 \text{ ja } y<-x^2+1\}$$

3. Olkoon $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 + 1$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio.

a) Määrää suunnattu derivaatta pisteessä $(-1,-2)$ vektorin $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ suuntaan. (3p)

b) Mihin suuntaan funktion arvot muuttuvat vähiten pisteessä $(-1,-2)$? Mihin suuntaan funktion arvot kasvavat voimakkaimmin? (3p)

Ratkaisu:
a)

$$\nabla f(x,y) = 2(x-1)\vec{i} + 2(y+3)\vec{j}, \quad \nabla f(-1,-2) = 2(-1-1)\vec{i} + 2(-2+3)\vec{j} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{j})$$

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(-1,-2) = \frac{1}{5}(-4,2)\cdot(1,-2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-4-4) = -\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

b) Funktion arvot kasvavat voimakkaimmin gradientin suuntaan eli suuntaan $-4\vec{i} + 2\vec{j}$. Olkoon $w = a\vec{i} + b\vec{j}$. Arvot muuttuvat vähiten, kun pistetulo on nolla (eli arvot eivät muutu lainkaan). Tällöin $(-4,2)\cdot(a,b) = 0$ eli $-4a + 2b = 0$, josta saadaan $b = 2a$. Jos $a = \pm 1$, niin $b = \pm 2$. Siis suunnat, mihin arvot muuttuvat vähiten ovat $\pm(\vec{i} + 2\vec{j})$.

4. a) Määrää funktion $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2}y^2 + xy$ kriittiset pisteet ja niiden laatu. (4p)

b) Olkoon $f(x,y) = -2x^{-2} + y^3$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x(t) = \mathrm{e}^{-t}$ ja $y(t) = \mathrm{e}^t$. Käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ muuttujan t avulla. (2p)

Ratkaisu:
a) Funktion kriittiset pisteet saadaan ratkaisemalla $\nabla f(x,y) = \vec{0}$. Nyt $\nabla f(x,y) = (x^2 - 2 + y)\vec{i} + (y+x)\vec{j}$, joten saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 &= 0 \\ x + y &= 0. \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan $y = -x$ ja sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1. \end{cases}$$

Kun $x = 2$, niin $y = -2$ ja kun $x = -1$, niin $y = 1$. Kriittiset pisteet ovat: $(2,-2)$ ja $(-1,1)$. Kriittisten pisteiden laatu saadaan ns. toisen derivaatan avulla. Nyt

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ja edelleen pisteessä $(2, -2)$

$$H_f(2, -2) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin determinantti on $4 \cdot 1 - 1 \cdot 1)3 > 0$, joten piste $(2, -2)$ on joko paikallinen minimi tai maksimi. Koska $h_1 1 = 4 > 0$, niin piste $(2, -2)$ on paikallinen minimi. Pisteessä $(-1, 1)$:

$$H_f(-1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin determinantti on $-2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -3 < 0$, joten piste $(-1, 1)$ on satulapiste.

b) Nyt $f_x = -2(-2)x^{-3}$, $f_y = 3y^2$, $x_t = -\mathrm{e}^{-t}$ ja $y_t = \mathrm{e}^t$, joten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= f_x x_t + f_y y_t = 4x^{-3} \cdot (-\mathrm{e}^{-t}) + 3y^2 \cdot \mathrm{e}^t \\ &= -4(\mathrm{e}^{-t})^{-3} \cdot \mathrm{e}^{-t} + 3(\mathrm{e}^t)^2 \mathrm{e}^t \\ &= -4\mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^t \\ &= -4\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{2t}(3\mathrm{e}^t - 4). \end{aligned}$$