

MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 9

1. Tutki seuraavien vektorikenttien lähteettömyys ja pyörteettömyys, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

a) $\vec{v}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$,

b) $\vec{v}(x, y, z) = (2x - e^{yz})\vec{i} + (3x^2e^z - y)\vec{j} + (\sin(x) - z)\vec{k}$.

2. Olkoon $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä ja $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Oletetaan, että funktioiden P , Q , R ja f toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Osoita, että

a) vektorikenttä $\nabla \times \vec{F}$ on lähteetön,

b) vektorikenttä ∇f on pyörteetön.

3. Totea, että vektorikenttä $\vec{F}(x, y) = (6xy - 5)\vec{i} + (3x^2 + 2y)\vec{j}$ on konservatiivinen. Määrä potentsiaalifunktio $U(x, y)$.

4. Totea, että vektorikenttä $\vec{F}(x, y, z) = (yz^2 - y^2)\vec{i} + (xz^2 + 2z - 2xy)\vec{j} + (2xyz + 2y - 3z^2)\vec{k}$ on konservatiivinen. Määrä potentiaalifunktio $U(x, y, z)$.

5. a) Laske käyräintegraali

$$\int_C xy \, dx - x^2 \, dy,$$

kun C on käyrä $y = \ln x$ pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(e, 1)$.

b) Laske käyräintegraali

$$\int_C (4x - 3z) \, dx + 8y \, dy - 3x \, dz$$

kun C on käyrä $\vec{x}(t) = (t - 1)\vec{i} - 2t\vec{j} + 3t\vec{k}$ pisteestä $(-1, 0, 0)$ pisteeseen $(0, -2, 3)$.

c) Laske käyräintegraali

$$\int_C (3x - y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

kun C on käyrä $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, missä:

$$C_1 : \vec{x}_1(t) = t\vec{i} + 0\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2 : \vec{x}_2(t) = (1 - t)\vec{i} + t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_3 : \vec{x}_3(t) = 0\vec{i} + (1 - t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

6. Olkoon C käyrä $\vec{x}(t) = t\vec{i} + (2 \sin^5(\frac{\pi}{2}t^7) + 1)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$. Laske käyräintegraali

$$\int_C (4x^3y^6 - 7x^6y) \, dx + (6x^4y^5 - x^7 + 2ye^{y^2}) \, dy.$$