

# MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

## Harjoitus 8

1. Laske sen kappaleen tilavuus, jota ylhäältä rajoittaa paraboloidipinta  $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ , alhaalta taso  $z = -1$  sekä sivuilta tasot  $y = 0$ ,  $x = 0$  ja  $y = 2 - x$ . Piirrä kuva kappaleesta.
2. a) Laske napakoordinaattien avulla

$$\int_{-3}^0 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} e^{25-x^2-y^2} dy dx.$$

Piirrä kuva tasoalueesta, jonka yli integrointi suoritetaan.

- b) Olkoon  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \leq 0, y \geq 0\}$  ympyrärenkaan osa. Laske napakoordinaattien avulla

$$\iint_A \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + 2}} dA.$$

3. Kappaletta rajoittaa ylhäältä pallopinta  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  ja alhaalta taso  $z = 0$  sekä sivuilta lieriöpinta  $x^2 + y^2 = 4$ . Laske sylinterikoordinaattien avulla kappaleen tilavuus.
4. Laske sylinterikoordinaattien avulla

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^3 dz dy dx.$$

5. a) Olkoon kappale  $V$  se osa palloa  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ , jolle  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  ja  $z \leq 0$ . Laske pallokoordinaattien avulla

$$\iiint_V \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV.$$

- b) Olkoon  $R > 0$  reaaliluku. Olkoon edelleen kappale

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\}.$$

Laske pallokoordinaattien avulla

$$I_R = \iiint_V \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} dV.$$

Määää luku  $R > 0$  siten, että  $I_R = \frac{\pi}{16} \ln 7$ .