MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 6 ratkaisut

1. Kappale liikkuu pitkin käyrää $\vec{x}(t) = \frac{1}{3}(t-2)^2\vec{i} + (t-\frac{1}{2})\vec{j}$, $t \geq 0$, ja kappaleen lämpötila pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on $T(x,y) = 20\,\mathrm{e}^{-x-2y^2}$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = T(x(t), y(t))$. Ketjusäännöllä saadaan kappaleen lämpötilan muutosnopeus hetkellä $t > 0$, $\vec{x}'(t) = (\frac{2}{3}(t-2), 1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= -20\,\mathrm{e}^{-x-2y^2} \cdot \frac{2}{3}(t-2) + 20(-4y)\,\mathrm{e}^{-x-2y^2} \cdot 1 \\
&= -20\,\mathrm{e}^{-x-2y^2}\left(\frac{2}{3}(t-2) + 4y\right) \\
&= -20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(t-2)^2-2(t-\frac{1}{2})^2}\left(\frac{2}{3}(t-2) + 4(t-\frac{1}{2})\right),\ t > 0.
\end{aligned}$$

Nyt $-20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(t-2)^2-2(t-\frac{1}{2})^2} < 0$ kaikilla $t > 0$ ja

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}(t-2) + 4(t-\frac{1}{2}) &> 0 \\
\frac{14}{3}t &> \frac{10}{3} \\
t &> \frac{5}{7},
\end{aligned}$$

joten kappale lämpenee ($\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} > 0$), kun 0 s < t < $\frac{5}{7}$ s, ja kappale jäähtyy ($\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} < 0$), kun $t > \frac{5}{7}$ s.

Kappaleen lämpötila on suurin hetkellä $t = \frac{5}{7}$ s.

Kappale on pisteessä $\vec{x}(\frac{5}{7}\text{ s}) = (\frac{1}{3}(\frac{5}{7}-2)^2\text{ cm}, \frac{5}{7}-\frac{1}{2}\text{ cm}) = (\frac{27}{49}\text{ cm}, \frac{3}{14}\text{ cm})$.

2. Nyt $f_x = 6x + y + 3$ ja $f_y = x - 4y - 1$ sekä $x_r = 2$, $x_s = -3$ ja $y_r = 1$, $y_s = 1$, joten

$$\begin{aligned}
z_r &= f_x x_r + f_y y_r = (6x+y+3)\cdot 2 + (x-4y-1)\cdot 1 \\
&= 12(2r-3s) + 2(r+s) + 6 + 2r - 3s - 4(r+s) - 1 \\
&= 24r - 41s + 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= f_x x_s + f_y y_s = (6x+y+3)\cdot(-3) + (x-4y-1)\cdot 1 \\
&= -18(2r-3s) - 3(r+s) - 9 + (2r-3s) - 4(r+s) - 1 \\
&= -41r + 44s - 10
\end{aligned}$$

3. a) **Kriittiset pisteet** ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} 4y - 2xy = 0 \\ 4x - x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $2y(2-x) = 0$, joten joko $y = 0$ tai $x = 2$.
1. Sijoitetaan $y = 0$ alempaan yhtälöön, jolloin $4x - x^2 = 0$ eli $x(4-x) = 0$, josta saadaan $x = 0$ tai $x = 4$. Kriittiset pisteet ovat siis: $(0,0)$ ja $(4,0)$.
2. Sijoitetaan $x = 2$ alempaan yhtälöön, jolloin $8 - 4 - 4y^2 = 0$ eli $y^2 = 1$, josta saadaan $y = \pm 1$. Kriittiset pisteet ovat siis: $(2,-1)$ ja $(2,1)$.

Lasketaan toiset osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2y, \\ f_{yy}(x,y) &= -8y, \\ f_{xy}(x,y) &= 4-2x, \end{aligned}$$

joten

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & 4-2x \\ 4-2x & -8y \end{bmatrix}$$

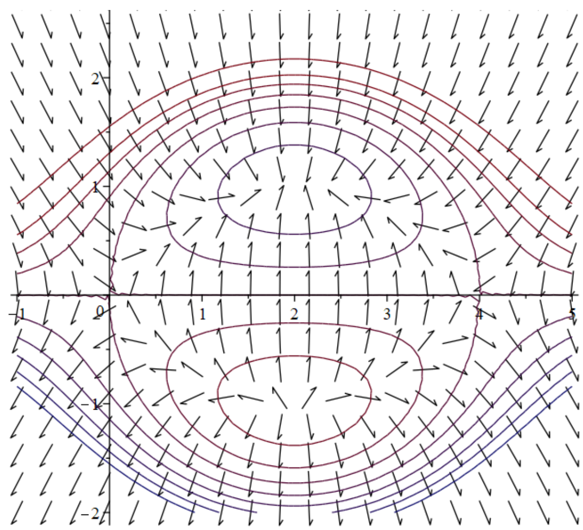
ja $\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, joten piste $(0,0)$ on satulapiste.

Vastaavasti $\det H_f(4,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ piste $(4,0)$ on satulapiste.

Piste $(2,-1)$ on paikallinen minimi, sillä $\det H_f(2,-1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0$ ja $h_{11} = 2 > 0$.

Piste $(2,1)$ on paikallinen maksimi, sillä $\det H_f(2,1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0$ ja $h_{11} = -2 < 0$.

Oheisesta kuvasta voi vielä tarkastella kriittisten pisteiden laatua gradienttien avulla.



3D visualisointi Geogebrassa: `https://www.geogebra.org/classic/qpr4cxeq`

b) **Kriittiset pisteet** ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 4 = 0 \\ -\dfrac{2}{y^3} + 16 = 0, \end{cases}$$

josta saadaan kriittiset pisteet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ja $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Nyt

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2x^{-3} & 0 \\ 0 & 6y^{-4}, \end{bmatrix}$$

joten

$$\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} < 0,$$

joten piste $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ on satulapiste.

Piste $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ on funktion f paikallinen minimipiste, sillä

$$\det H_f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} > 0$$

ja $h_{11} = \frac{1}{4} > 0$.

4. Minimoitava funktio on $f(x, y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$ ja lisäehto $g(x, y) = 2x + y - 5 = 0$. Selvästi funktion f globaali minimipiste on $(3, 4)$, mutta se ei toteuta lisäehtoa (sillä $g(3, 4) = 2 \cdot 3 + 4 - 5 = 6 + 4 - 5 = 5 \neq 0$). Nyt $\nabla f(x, y) = 2(x-3)\vec{i} + 2(y-4)\vec{j}$ ja $\nabla g(x, y) = 2\vec{i} + \vec{j}$, joten on löydettävä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, joille
$$\begin{cases} 2(x-3) = 2\lambda \\ 2(y-4) = \lambda \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$$
Nyt $x = \lambda + 3$ ja $y = \frac{1}{2}\lambda + 4$, joten
$$2x + y - 5 = 2\lambda + 6 + \frac{1}{2}\lambda + 4 - 5 = \frac{5}{2}\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2,$$
josta edelleen saadaan $x = -2 + 3 = 1$ ja $y = -1 + 4 = 3$. Rajoitetun optimointiongelman ratkaisu on $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ja tällöin $f(1, 2) = (1-3)^2 + (3-4)^2 = 5$.

5. Nyt $\nabla f(x, y, z) = 24\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\nabla g(x, y, z) = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$, joten on ratkaistava:
$$\begin{cases} 24 & = -2\lambda x \\ 12 & = -2\lambda y \\ -3 & = \lambda \\ z - x^2 - y^2 & = 0. \end{cases}$$
Kolmannesta yhtälöstä saadaan $\lambda = -3$, joten ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä seuraa $x = 4$ ja $y = 2$. Täten $z = x^2 + y^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Siten funktion f suurin arvo annetulla lisäehdolla on $f(4, 2, 20) = 24 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 3 \cdot 20 = 60$.