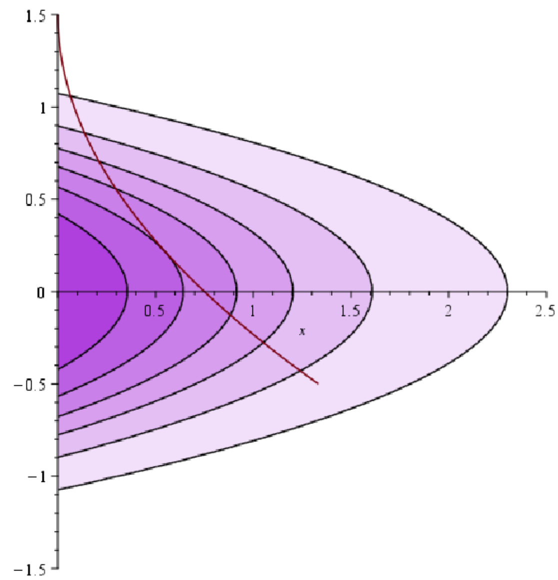
MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 6

1. Kappale liikkuu xy-koordinaatistossa käyrää $\vec{x}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \frac{1}{3}(t-2)^2\vec{i} + (t-\frac{1}{2})\vec{j}$ pitkin, missä $t \geq 0$ kuvaa aikaa sekunneissa ja x- ja y- koordinaattien yksikkö on cm. Kappaleen lämpötila (°C) pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on $T(x, y) = 20e^{-x-2y^2}$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = T(x(t), y(t))$. Laske *ketjusäännön* avulla kappaleen lämpötilan muutosnopeus (°C/s) hetkellä $t > 0$. Millä ajan t hetkellä kappaleen lämpötila on suurin? Missä tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä kappale tällöin on?



2. Olkoon $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(r, s) = 2r - 3s$, $y = y(r, s) = r + s$. Olkoon edelleen $z(r, s) = f(x(r, s), y(r, s))$ yhdistetty funktio. Käytä ketjusääntöä ja esitä osittaisderivaatat z_r ja z_s muuttujien r ja s avulla.

3. a) Määrää funktion $f(x, y) = 4xy - x^2y - \frac{4}{3}y^3$ kaikkien kriittisten pisteiden laatu.

   b) Määrää funktion $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x} - 4x + 16y$ kaikkien kriittisten pisteiden laatu.

4. Laske rajoitettu optimointiongelma

$$\begin{aligned} &\min\ (x-3)^2 + (y-4)^2 \\ &2x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

   etsimällä se (x, y)-tason piste (x_0, y_0) ja vakion $\lambda \in \mathbb{R}$ arvo, joille on voimassa

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

   ja $g(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 - 5 = 0$. Toisin sanoen etsi piste (x_0, y_0), joka toteuttaa rajoite-ehdon ja missä gradienttivektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

5. Määrää Lagrangen menetelmällä funktion $f(x, y, z) = 24x + 12y - 3z$ suurin arvo lisäehdolla $z = x^2 + y^2$.