MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 5 ratkaisut

1. a) Funktion f gradientti on $\nabla f(x,y) = (4x - 3y^3)\vec{i} - 9xy^2\vec{j}$ ja erityisesti $\nabla f(2,-1) = (4\cdot 2 - 3(-1)^3)\vec{i} - 9\cdot 2\cdot(-1)^2)\vec{j} = 11\vec{i} - 18\vec{j}$.

   b) Nyt $\vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}a}(a\vec{i} - 2a\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{j})$.

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{u}^0} f(a,-1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((4a - 3(-1)^3)\vec{i} - 9a(-1)^2\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(4a + 3 + 18a) = \frac{1}{\sqrt{5}}(22a+3),\end{aligned}$$

   joten

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(22a+3) = \sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad 22a + 3 = 5 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{11}.$$

2. Nyt $\nabla f(x,y) = (2(x-2y)+2(x-1))\vec{i} - 4(x-2y)\vec{j}$, joten $\nabla f(1,0) = (2(1-0)+2(1-1))\vec{i} - 4(1-0)\vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.

   a) Vektori $\vec{u} = \vec{u}^0 = \vec{j}$, joten

$$\nabla_{\vec{u}} f(1,0) = (2,-4)\cdot(0,1) = -4.$$

   b) Nyt $\vec{v}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ ja

$$\nabla_{\vec{v}^0} f(1,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-4)\cdot(1,-2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2+8) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

   Funktio f saa pienimmillään arvon 0 ja se tapahtuu, kun $x - 2y = 0$ ja $x - 1 = 0$ eli pisteessä $(1, \frac{1}{2})$. a)-kohdassa vektori osoittaa suoraan minimipisteeseen ja suunnatun derivaatan negatiivinen arvo kuvaa funktion arvo vähenemistä ko. suuntaan. b)-kohdassa vektori $\vec{v}$ on itse asiassa sama kuin funktion gradientti. Gradienttivektori osoittaa funktion arvojen suurimman kasvun suunnan.

3. Nyt $\nabla f(x,y) = (2y^3 + 2xy^2)\vec{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\vec{j}$ ja $\nabla f(0,1) = 2\vec{i} + 4\vec{j} = (2,4)$.

   a) Merkitään $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, jolloin $\vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ ja suunnattu derivaatta on

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,4)\cdot(-1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2+8) = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

   b) Suunnatun derivaatan suurin arvo saadaan laskemalla suunnattu derivaatta funktion f gradientin suuntaan eli suuntaan $2\vec{i} + 4\vec{j}$, josta normeerattu muoto on $\frac{1}{\sqrt{20}}(2,4)$ ja suunnattu derivaatta on

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(2,4)\cdot(2,4) = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

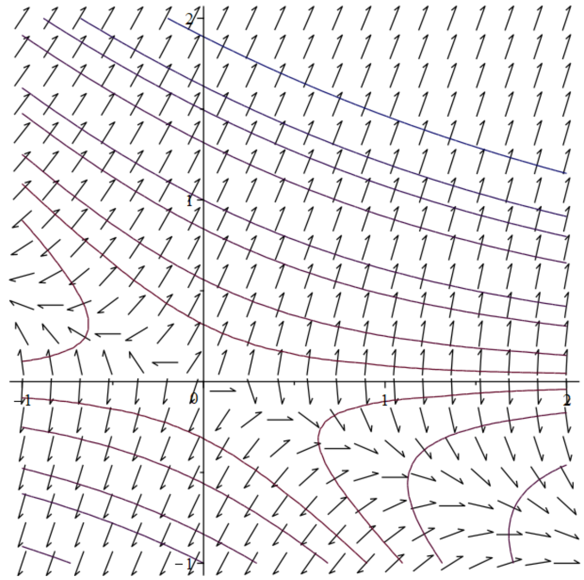
   c) Funktion arvot vähenevät voimakkaimmin negatiivisen gradientin eli vektorin $(-2,-4)$ suuntaan.

   d) Funktion arvot muuttuvat vähiten, kun suunnatun derivaatan arvo on 0. Olkoon $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ja vaaditaan

$$(2,4)\cdot(a,b) = 0, \quad \text{joten} \quad 2a + 4b = 0 \quad \text{eli} \quad a = -2b,$$

   ja asetetaan $b = \pm 1$ jolloin $a = \mp 2$. Funktion arvot muuttuvat vähiten suuntiin $\pm(-2\vec{i} + \vec{j})$.

   Alla olevaan kuvaan on piirretty funktion f tasa-arvokäyriä ja gradienttikenttä (gradienttivektorit on tässä normeerattu ykkösen pituisiksi). Pohdi, miten saamasi ratkaisut vertautuvat alla olevaan kuvaan.



4. Nyt $\nabla f(x,y) = (2xy+y^2+2)\vec{i}+(x^2+2(x-1)y)\vec{j}$ ja $\nabla f(-4,1) = -5\vec{i}+6\vec{j}$. Normeerattu suuntavektori on $\vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-\vec{i}+a\vec{j})$ ja suunnattu derivaatta on tällöin

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-\vec{i}+a\vec{j})\cdot(-5\vec{i}+6\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(5+6a).$$

Vaaditusta ehdosta saadaan

$$5+6a = 6\sqrt{1+a^2}, \quad \text{joten} \quad 25+60a+36a^2 = 36(1+a^2) \quad \text{ja edelleen} \quad a = \frac{11}{60}.$$