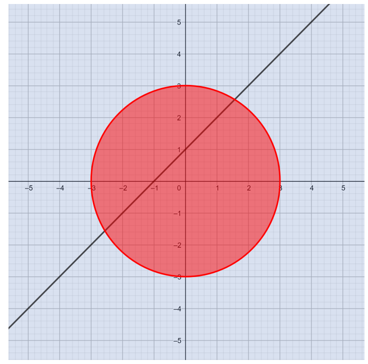
MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 4 ratkaisut

1. a)



Määritysjoukossa on oltava voimassa

$$\begin{cases} x^2+y^2-9 \geq 0, \\ x-y+1 \neq 0. \end{cases}$$

Siis $M_f = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \geq 3^2 \text{ ja } y \neq x+1 \}$.

b) Logaritmit ovat määriteltyjä, kun

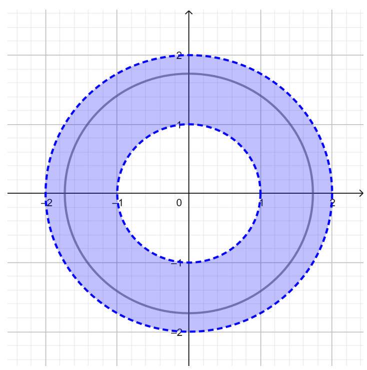
$$\begin{cases} x^2+y^2-1 > 0, \\ 4-x^2-y^2 > 0. \end{cases}$$

Lisäksi on oltava

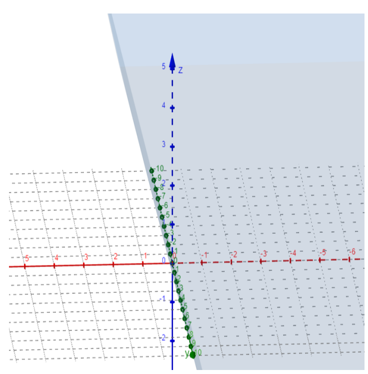
$$\ln(4-x^2-y^2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 4-x^2-y^2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \neq \sqrt{3}^2$$

Siis

$$\begin{aligned} M_f &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 > 1^2 \;\cap\; x^2+y^2 < 2^2 \;\cap\; x^2+y^2 \neq \sqrt{3}^2 \} \\ &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1^2 < x^2+y^2 < \sqrt{3}^2 \cup \sqrt{3}^2 < x^2+y^2 < 2^2 \,\}. \end{aligned}$$



c)



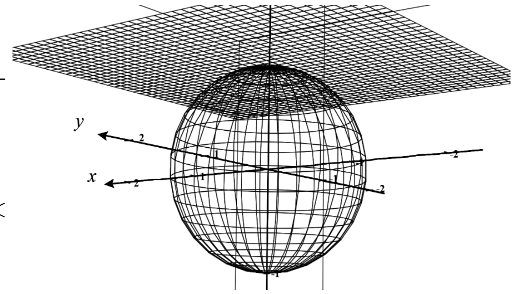
Määritysjoukossa on oltava voimassa $z-3x > 0$.
Siis $M_f = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 3x \,\}$.

d)

Nyt määritysjoukossa on oltava voimassa yhtäaikaisesti

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 0, \\ 1 - z > 0. \end{cases}$$

Siis $M_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 1 \text{ ja } z < 1 \}$.



2. a) Pinta $x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{3})^2$ on $\sqrt{3}$-säteinen, origokeskinen **pallopinta**. Ei ole funktio.

   b) Pinta $z = x + 1$ on **taso**. On funktio.

   c) Pinta $z = -2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ on positiivisen z-akselin suuntaan avautuva **kartiopinta**, jonka huippu on pisteessä $(0, 0, -2)$. On funktio.

   d) Pinta $z = 3 - x^2 - y^2$ on negatiivisen z-akselin suuntaan avautuva **paraboloidipinta**, jonka huippu on pisteessä $(0, 0, 3)$. On funktio.

   e) Pinta $y^2 + z^2 = 2^2$ on 2-säteinen **lieriöpinta**. Akselina x-akseli. Ei ole funktio.

   Kuvat pinnoista Geogebrassa

3. Pinta $z = f(u, v) = \ln \sqrt{u^2 + v}$, $v > -u^2$

   Määrätään tasa-arvokäyrät:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \ln(2) \quad ; \quad \sqrt{u^2+v} = 2 \quad ; \quad v = -u^2 + 4 \\ f(u,v) &= 0 \quad ; \quad \sqrt{u^2+v} = e^0 \quad ; \quad v = -u^2 + 1 \end{aligned}$$

   Tasa-arvokäyrien käyrätyyppi on paraabeli.

4. Valitaan ensin lähestymistie $y = x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y = x}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

   Valitaan sitten lähestymistie $y = x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y = x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

   Raja-arvoa ei ole olemassa.

5. Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= m\pi \cos(m\pi x)\sin(n\pi y), \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) &= n\pi \sin(m\pi x)\cos(n\pi y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) &= -(m\pi)^2 \sin(m\pi x)\sin(n\pi y) = -(m\pi)^2 u(x,y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) &= -(n\pi)^2 \sin(m\pi x)\sin(n\pi y) = -(n\pi)^2 u(x,y), \end{aligned}$$

joten

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = (m^2+n^2)\pi^2 u(x,y)$$

eli $\lambda_{m,n} = (m^2+n^2)\pi^2$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.