

MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 4

1. Määrä seuraavien funktioiden määrittäjäjoukot ja piirrä ne (määrittäjäjoukot) xy - tai xyz -koordinaatistoon:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x, y) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x - y + 1}, & \text{b)} \quad f(x, y) &= \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\ln(4 - x^2 - y^2)}, \\ \text{c)} \quad f(x, y, z) &= \frac{x - y}{\sqrt{z - 3x}}, & \text{d)} \quad f(x, y, z) &= \frac{x^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)\sqrt{1 - z}}. \end{aligned}$$

2. Piirrä xyz -koordinaatistoon seuraavat pinnat:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 3, & \text{b)} \quad z - x - 1 &= 0, & \text{c)} \quad z &= -2 + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{d)} \quad z &= 3 - x^2 - y^2, & \text{e)} \quad y^2 + z^2 &= 4. \end{aligned}$$

Mitkä eo. pinnoista ovat kahden muuttujan funktion $z = f(x, y)$ kuvaajia?

3. Määrä kahden muuttujan funktion

$$z = f(u, v) = \ln \sqrt{u^2 + v}, \quad v > -u^2$$

arvoja $z = \ln(2)$ ja $z = 0$ vastaavat tasa-arvokäyrät. Mikä on näiden tasa-arvokäyrien käyrätyyppi (esim. hyperbeli, ellipsi, jne.)?

4. Tutki, onko seuraava raja-arvo olemassa:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Valitse lähestymistieksi origon kautta kulkevat suora $y = x$ sekä käyrä $y = x^2$.

5. Olkoon $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ja $u(x, y) = \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$, missä $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ja $(x, y) \in S$. Miten $\lambda \in \mathbb{R}$ olisi valittava, että

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = \lambda u(x, y)$$

on voimassa?