MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 3 ratkaisut

1. a) Tunnetaan Maclaurinin kehitelmät

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, |x| < 1,$$

joten saadaan

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + x\cosh(2x) - 3x}{x^2 \ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots + x\left(1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right) - 3x}{x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots + \frac{2^2x^3}{2!} + \frac{2^4x^5}{4!} - \cdots}{x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(-\frac{2^3}{3!} + \frac{2^2}{2!}\right)x^3 + \left(\frac{2^5}{5!} + \frac{2^4}{4!}\right)x^5 + \cdots\right) : x^3}{\left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots\right) : x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(-\frac{2^3}{3!} + \frac{2^2}{2!}\right) + \left(\frac{2^5}{5!} + \frac{2^4}{4!}\right)x^2 + \cdots\right)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots} \\
&= -\frac{2^3}{3!} + \frac{2^2}{2!} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

b) Tunnetaan Maclaurinin kehitelmät

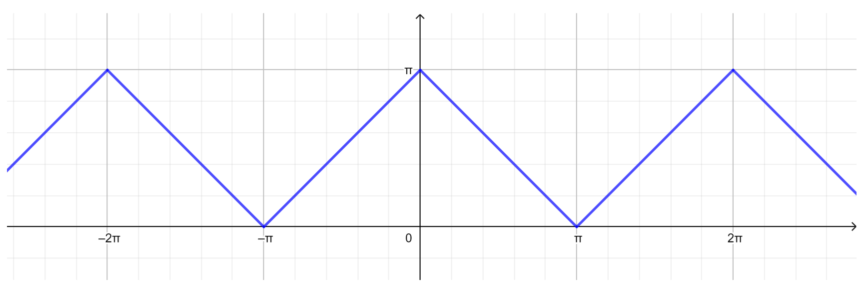
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

joten saadaan

$$
\begin{aligned}
L_a &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(ax) - x\cosh(ax)}{\sin(ax) - \sinh(ax)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \cdots) - x(1 + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} + \frac{(ax)^6}{6!} + \cdots)}{(ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots) - (ax + \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} + \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{a^2x^3}{2!} + \frac{a^4x^5}{4!} - \frac{a^6x^7}{6!} + \cdots) - (x + \frac{a^2x^3}{2!} + \frac{a^4x^5}{4!} + \frac{a^6x^7}{6!} + \cdots)}{ax - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} - \frac{a^7x^7}{7!} + \cdots - ax - \frac{a^3x^3}{3!} - \frac{a^5x^5}{5!} - \frac{a^7x^7}{7!} - \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{a^2x^3}{2!} + \frac{a^4x^5}{4!} - \frac{a^6x^7}{6!} + \cdots - x - \frac{a^2x^3}{2!} - \frac{a^4x^5}{4!} - \frac{a^6x^7}{6!} - \cdots}{-\frac{2a^3x^3}{3!} - \frac{2a^7x^7}{7!} - \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{2a^2x^3}{2!} - \frac{2a^6x^7}{6!} - \cdots) : x^3}{(-\frac{2a^3x^3}{3!} - \frac{2a^7x^7}{7!} - \cdots) : x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2a^2}{2!} - \frac{2a^6x^4}{6!} - \cdots}{-\frac{2a^3}{3!} - \frac{2a^7x^4}{7!} - \cdots} = \frac{-\frac{2a^2}{2!}}{-\frac{2a^3}{3!}} = \frac{3}{a}.
\end{aligned}
$$

Määrätään reaaliluku $a \neq 0$ yhtälöstä $L_a = \dfrac{3}{a} = 3$, josta $a = 1$.

2. Kuvaaja:



Lasketaan Fourier-sarjan kertoimet annetuilla kaavoilla. Koska kyseessä on parillinen funktio, niin tiedetään, että $b_k = 0$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \Big/_{0}^{\pi} (\pi x - \frac{1}{2}x^2) = \frac{2}{\pi}(\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 - 0) = \pi, \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big/_{0}^{\pi} \frac{1}{k}(\pi - x)\sin(kx) - \int_0^{\pi} (-\frac{1}{k}\sin(kx))\ \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \Big/_{0}^{\pi} -\frac{1}{k^2}\cos(kx) = \frac{2}{k^2\pi}(-\cos(\pi k) + \cos(0)) = \frac{2}{k^2\pi}(1 - (-1)^k), \\
b_k &= 0.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan lasketut kertoimet Fourier-kehitelmään:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}(1 - (-1)^k) \cos(kx).$$

Tiedetään, että $S(0) = f(0) = \pi$, joten

$$\begin{aligned} \pi = S(0) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}(1 - (-1)^k) \cos(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Koska parillisilla k:n arvoilla $1 - (-1)^k = 0$ ja parittomilla $1 - (-1)^k = 2$, niin

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2},$$

joten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Taylorin polynomi on muotoa

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

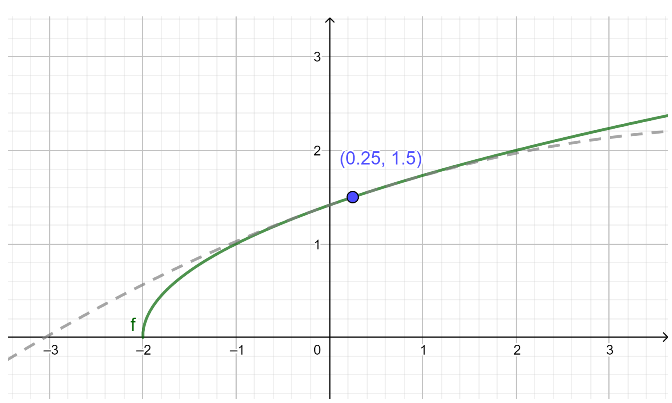
joten lasketaan tarvittavat derivaatat ja niiden arvot pisteessä $x_0 = \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+x)^{\frac{1}{2}} & f(\tfrac{1}{4}) &= \frac{3}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} & f'(\tfrac{1}{4}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(2+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(\tfrac{1}{4}) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{2}{27}. \end{aligned}$$

Siten

$$T_2(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{4}) - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{4}) - \frac{1}{27}(x - \frac{1}{4})^2.$$

Nyt $f(0) = \sqrt{2} \approx 1,41421$ ja $T_2(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{4} = \frac{611}{432} \approx 1,41435$, joten arvot eroavat neljännessä desimaalissa.



4. Käytetään kaavakokoelman kaavaa

$$\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Nyt $f(x) = \ln(4+5x) = \ln(4(1+\frac{5}{4}x)) = \ln(4) + \ln(1+\frac{5}{4}x)$, joten

$$T_n(x) = \ln(4) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}}{k+1} x^{k+1},$$

kun $\left|\frac{5}{4}x\right| < 1$ eli $-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$. Nyt $x = 1$ ei kuulu suppenemisalueeseen, joten funktion approksimointi ko. pisteessä ei ole mielekästä.

Taylorin polynomin voi määrittää myös laskemalla derivaatat ja määrittämällä suppenemissäteen kuten normaalisti potenssisarjalle.