

MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 3

1. a) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + x \cosh(2x) - 3x}{x^2 \ln(x+1)}.$$

- b) Olkoon $a \neq 0$ reaaliluku. Laske potenssisarjojen avulla seuraava raja-arvo:

$$L_a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(ax) - x \cosh(ax)}{\sin(ax) - \sinh(ax)}.$$

Millä reaaliluvun $a \neq 0$ arvolla $L_a = 3$?

2. Hahmottele 2π -jaksollisen funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x + \pi, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - \pi, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

kuvaaja ja määrää funktion Fourier-sarja $S(x)$. Laske tuloksen $S(0) = f(0)$ avulla sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

summalle tarkka arvo.

3. Määrää Taylorin toisen asteen polynomi $T_2(x)$ funktiolle $f(x) = \sqrt{2+x}$ kehityskeskuksena $x_0 = \frac{1}{4}$. Piirrä funktioiden kuvaajat esimerkiksi Geogebrailla. Laske $f(0)$ ja $T_2(0)$. Monennessako desimaalissa funktioiden arvot eroavat?
4. Määrää Taylorin n :n asteen polynomi $T_n(x)$ pisteen $x_0 = 0$ ympäristössä funktiolle $f(x) = \ln(4+5x)$. Logaritmien laskusäännöistä ja kaavakokoelmasta voi olla hyötyä. Onko mielekästä approksimoida funktion f arvoa pisteessä $x = 1$ Taylorin polynomien avulla? Miksi/miksi ei?