# MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

## Harjoitus 2 ratkaisut

1. a)

Sarjan termit ovat positiivisia: $a_k = \dfrac{2\sqrt{k}}{7k-2} > 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

**Vertailuperiaate**:

$$a_k = \frac{2\sqrt{k}}{7k-2} > \frac{2k^{\frac{1}{2}}}{7k} = \frac{2}{7}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{7}\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ hajaantuu ($0 < p = \frac{1}{2} \leq 1$), joten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{k}}{7k-2}$ **hajaantuu** vertailuperiaatteen nojalla.

b)

Sarjan termit ovat positiivisia: $a_k = \dfrac{2\sqrt{k}}{7k^2-2} > 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

**Vertailuperiaate**:

$$0 < a_k = \frac{2\sqrt{k}}{7k^2-2} \leq \frac{2k^{\frac{1}{2}}}{7k^2-2k^2} = \frac{2}{5}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ suppenee ($p = \frac{3}{2} \geq 1$), joten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{k}}{7k^2-2}$ **suppenee** vertailuperiaatteen nojalla.

c) **Integraalitesti**:

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^3+x} > 0$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = \dfrac{6x(x^3+x)-(3x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = -\dfrac{3x^4+1}{(x^3+x)^2} < 0$, kun $x \geq 1$.

Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} \ln\left|x^3+x\right| = \infty.$$

Sarja **hajaantuu** integraalitestin nojalla.

d) **Integraalitesti**:

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3(x^4+1)^{-4}$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x) = x^3(x^4+1)^{-4} > 0$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = 3x^2(x^4+1)^{-4} - 4x^3(x^4+1)^{-5}4x^3 = -x^2(13x^4-3)(x^4+1)^{-5} < 0$, kun $x \geq 1$.

Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x^3(x^4+1)^{-4}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^4+1)^{-3}}{-3} = \frac{1}{96}.$$

Sarja **suppenee** integraalitestin nojalla.

e) Sarjan termit ovat positiivisia: $a_k = \dfrac{4 + 3\cos(k)}{2k^6} > 0$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$.

**Vertailuperiaate**:

$$0 < \frac{4 + 3\cos(k)}{2k^6} < \frac{4+3}{2k^6} = \frac{7}{2k^6}.$$

Vertailusarja $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{7}{2k^6}$ suppenee ($p = 6 > 1$), joten tutkittava sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4 + 3\cos(k)}{2k^6}$ **suppenee** vertailuperiaatteen nojalla.

f) **Integraalitesti**:

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = 1\,\mathrm{e}^{-x^2} + x\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} < 0$, kun $x \geq 1$.

Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \Big/_{1}^{\infty} (-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}} < \infty.$$

Sarja **suppenee** integraalitestin nojalla.

2. a) Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1 + 5^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{1 + 5^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(\frac{1}{5^k} + 5)k!}{(\frac{1}{5^k} + 1)k!(k+1)} = 0.$$

$$R = \frac{1}{L} = \infty$$

Potenssisarja suppenee varmasti, kun $-\infty < x < \infty$.

b) Olkoon $t = x - \pi$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\pi^k}{k+1} t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}\pi^{k+1}}{k+2}}{\frac{(-1)^k\pi^k}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi(k+1)}{k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi}{1 + \frac{1}{k+1}} = \pi.$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\pi},$$

joten tutkittava potenssisarja suppenee varmasti, kun

$$|t| = |x - \pi| < \frac{1}{\pi} \quad -\frac{1}{\pi} < t = x - \pi < \frac{1}{\pi} \quad \pi - \frac{1}{\pi} < x < \pi + \frac{1}{\pi}.$$

c) Lasketaan raja-arvo:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty} \Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \lim_{k\to\infty} \Big|\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)!+k+1}}{\frac{k!}{k!+k}}\Big| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!(k!+k)}{((k+1)!+k+1)k!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k!(k+1)(k!+k)}{(k!(k+1)+k+1)k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k!+k)}{(k+1)(k!+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{(k-1)!}}{1+\frac{1}{k!}} = 1.
\end{aligned}
$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

Potenssisarja suppenee varmasti, kun $|x| < 1 \quad -1 < x < 1$.

d) Olkoon $t = x + 2$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\ln(k+2)} t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{\ln(k+3)}}{\frac{k!}{\ln(k+2)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\ln(k+2)}{\ln(k+3)} = \infty,$$

sillä jos tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+2)}{\ln(x+3)},\ x \geq 0,$$

niin

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\ln(x+2)}{\ln(x+3)} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2) + \frac{x+1}{x+2}}{\frac{1}{x+3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} [(x+3)\ln(x+2) + (x+3)\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}] = \infty.
\end{aligned}
$$

$$R = \frac{1}{L} = 0$$

Potenssisarja suppenee varmasti, kun $t = x + 2 = 0 \quad x = -2$ (yksi piste).

e)

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k \cdot (k+1)}{k!(k+1)} \cdot \frac{k!}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e},
\end{aligned}
$$

joten $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Potenssisarja suppenee varmasti, kun $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$.

f) Koska

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{k\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

niin $R = \frac{3}{2}$. Potenssisarja suppenee varmasti, kun $-\frac{3}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$ eli $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$. Potenssisarja suppenee siis pisteessä $x = 2$. Kun $x = \frac{5}{2}$, niin sarja tulee muotoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{2}-1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1+2+3+4+\ldots,$$

joten sarja ei suppene ko. pisteessä.

3. Olkoon $t = x - a$. Tällöin potenssisarja on muotoa $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{2^k}t^k$. Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a^{k+2}}{2^{k+1}} : \frac{a^{k+1}}{2^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a}{2}\right| \overset{a\geq 0}{=} \frac{a}{2}.$$

$$R_a = \frac{1}{L} = \frac{2}{a}$$

Tutkittava potenssisarja suppenee varmasti, kun

$$|t| = |x-a| < \frac{2}{a} \quad -\frac{2}{a} < t = x-a < \frac{2}{a} \quad -\frac{2}{a} + a < x < \frac{2}{a} + a.$$