

MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 2

1. Tutki tarkasti perustellen seuraavien sarjojen suppenemista:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k}}{7k-2}, \quad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k}}{7k^2-2}, \quad \text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{k^3+k}, \quad \text{d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{(k^4+1)^4}, \\ \text{e)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3\cos(k)}{2k^6}, \quad \text{f)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}. \end{aligned}$$

2. Määää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäde:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+5^k}{k!} x^k, \quad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^k}{k+1} (x-\pi)^k, \quad \text{c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!+k} x^k, \\ \text{d)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\ln(k+2)} (x+2)^k \quad \text{e)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k, \quad \text{f)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k (x-1)^k. \end{aligned}$$

Millä reaaliluvun x arvoilla potenssisarja varmasti suppenee? Suppeneeko tehtävän f sarja pisteessä $x=2$? Entä pisteessä $x=\frac{5}{2}$?

3. Olkoon $a > 0$ reaaliluku. Määää potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{2^k} (x-a)^k$$

suppenemissäde R_a . Millä reaaliluvun x arvoilla potenssisarja varmasti suppenee?