MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 1 ratkaisut

1. a) Lukujono $\left(\dfrac{k^2+5k}{2k^3+12}\right)_{k=1}^{\infty}$ suppenee, sillä

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+5k}{2k^3+12}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^3(\frac{1}{k}+\frac{5}{k^2})}{k^3(2+\frac{12}{k^3})}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}+\frac{5}{k^2}}{2+\frac{12}{k^3}}=0.$$

b) Tarkastellaan funktiota

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{3x},\ x\geq 1.$$

Tällöin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{3x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\frac{2}{x+\frac{1}{x}}=0,$$

joten lukujono $\left(\dfrac{\ln(k^2+1)}{3x}\right)_{k=1}^{\infty}$ suppenee ja raja-arvo on nolla.

c)

$$a_k=\int_1^k \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^k 2\,\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x=\Big/_{1}^{k}\ \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^{2}}{2}$$

Lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ hajaantuu, sillä

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\Big[\frac{e^{2k}-e^2}{2}\Big]=\infty.$$

d)

$$a_k=\int_1^k x^{-5}\ \mathrm{d}x=\Big/_{1}^{k}\ -\frac{1}{4}x^{-4}=-\frac{1}{4k^4}+\frac{1}{4}$$

Lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee, sillä

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{4k^4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

e)

$$a_k=\int_1^k\cos(\pi x)\ \mathrm{d}x=\Big/_{1}^{k}\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi}=\frac{\sin(\pi k)}{\pi}-\frac{\sin(\pi)}{\pi}=0-0=0$$

Lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee, sillä

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}0=0.$$

f) Sievennetään ensin termi a_k

$$a_k=\int_1^k(1-3x)^{-3}\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_1^k(-3)(1-3x)^{-3}\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\Big/_{1}^{k}\ -\frac{1}{2}(1-3x)^{-2}$$

$$=\frac{1}{6}\Big/_{1}^{k}\ \frac{1}{(1-3x)^2}=\frac{1}{6}(\frac{1}{(1-3k)^2}-\frac{1}{(1-3\cdot 1)^2})=\frac{1}{6}(\frac{1}{(1-3k)^2}-\frac{1}{4}),$$

joten

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-3k)^2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{24}$$

ja jono suppenee.

2. Lukujonon $a_k = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ kolme ensimmäistä termiä ovat $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = \dfrac{5}{36}$, $a_3 = \dfrac{7}{144}$.

   Lukujono suppenee ja sen raja-arvo on nolla, sillä

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k^3} + \frac{1}{k^4}}{(1+\frac{1}{k})^2} = 0.$$

3. a)

$$\frac{A}{3k+1} + \frac{B}{3k+4} = \frac{2}{(3k+1)(3k+4)}$$

   Tehdään samannimisiksi ja kerrotaan yhtälön molemmat puolet termillä $(3k+1)(3k+4)$:

$$A(3k+4) + B(3k+1) = 2.$$

   Yhdistetään samaa k:n astelukua vastaavat termit yhtälön kummallakin puolella:

$$(3A+3B)k + 4A + B = 0k + 2.$$

   Verrataan kertoimia, jolloin saadaaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3A + 3B &= 0 \\ 4A + B &= 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

   b)

$$a_k = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right),$$

   joten

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{14} \\ S_2 &= a_1 + a_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{13}\right) = \frac{3}{26} \end{aligned}$$

   c)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}\right)$$

   d)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

   joten sarja suppenee ja sarjan summa $S = \frac{1}{6}$.

4. Muodostetaan **osasummien jono** osamurtokehitelmän avulla:

$$\begin{aligned}
S_n(a) &= \sum_{k=3}^{n} \frac{2a^2}{(2k-3)(2k-1)} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{a^2}{2k-3} - \frac{a^2}{2k-1} \right) \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{5} - \frac{a^2}{7} + \frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9} + \cdots + \frac{a^2}{2n-5} - \frac{a^2}{2n-3} + \frac{a^2}{2n-3} - \frac{a^2}{2n-1} \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n-1},\ n = 3, 4, \ldots,
\end{aligned}$$

josta saadaan sarjan summa

$$S(a) = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n-1}\big) = \frac{a^2}{3}.$$

Reaaliluku a ratkeaa yhtälöstä $\dfrac{a^2}{3} = 27$, josta $a = \pm 9$.

5. Parittomilla k:n arvoilla osajono $\frac{1}{2024+k}$ suppenee kohti raja-arvoa 0, kun parillisilla k:n arvoilla kohti lukua $\frac{1}{2024}$. Näin ollen jono ei suppene. Raja-arvon määritelmästä seuraa, että kun $k \geq K$, niin jonon termit ovat korkeintaan ε:n päässä raja-arvosta. Nyt peräkkäisten termien erotus lähestyy arvoa $\frac{1}{2024}$, joten raja-arvoa ei ole olemassa (valitse esimerkiksi $\varepsilon = \frac{1}{3\cdot 2024}$).