MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II, kevät 2024

Harjoitus 1

1. Tutki, suppenevatko seuraavat lukujonot:

$$\text{a)}\quad \left(\frac{k^2+5k}{2k^3+12}\right)_{k=1}^{\infty},\quad \text{b)}\quad \left(\frac{\ln(k^2+1)}{3k}\right)_{k=1}^{\infty},\quad \text{c)}\quad \left(\int_1^k e^{2x}\,dx\right)_{k=1}^{\infty},$$

$$\text{d)}\quad \left(\int_1^k x^{-5}\,dx\right)_{k=1}^{\infty},\quad \text{e)}\quad \left(\int_1^k \cos(\pi x)\,dx\right)_{k=1}^{\infty},\quad \text{f)}\quad \left(\int_1^k (1-3x)^{-3}\,dx\right)_{k=1}^{\infty}.$$

2. Olkoon $a_k = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ lukujono. Laske lukujonosta kolme ensimmäistä termiä, ja määrää lukujonon raja-arvo, jos jono suppenee.

3. Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(3k+1)(3k+4)} \overset{\text{merk.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

a) Muodosta termin a_k osamurtokehitelmä laskemalla kertoimet A ja B yhtälöstä

$$\frac{A}{3k+1} + \frac{B}{3k+4} = \frac{2}{(3k+1)(3k+4)}.$$

b) Laske osasummien jonosta $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ kolme ensimmäistä termiä S_1, S_2 ja S_3.

c) Muodosta lauseke termille S_n.

d) Määrää $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ja päättele, suppeneeko sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Jos sarja suppenee, niin mikä on sarjan summa.

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan suppenevaa sarjaa

$$S(a) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2a^2}{(2k-3)(2k-1)}.$$

Laske sarjan summa $S(a)$ ja määrää reaaliluku $a > 0$ siten, että $S(a) = 27$.

5. Olkoon jono

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2024+k}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ \frac{1}{2024}, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}.$$

Suppeneeko jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$? Perustele vastauksesi.