031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

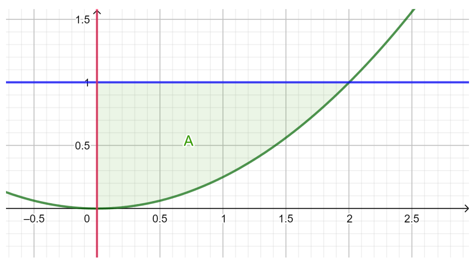
2. välikoe 02.03.2023, lyhyet ratkaisut

1. Olkoon A suljettu ja rajoitettu xy-tason alue, joka muodostuu käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$ ja suorien $y = 1$ ja $x = 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske integroimisjärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{4}x^2}^1 12x^3(y^3+1)^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu:
Alue A voidaan kuvata $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\sqrt{y}, 0 \le y \le 1\right\}$, joten

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\frac{1}{4}x^2}^1 12x^3(y^3+1)^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} 12x^3(y^3+1)^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\Big/_0^{2\sqrt{y}} 3x^4(y^3+1)^3 \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 3((2\sqrt{y})^4 - 0)(y^3+1)^3 \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 3 \cdot 16y^2(y^3+1)^3 \,\mathrm{d}y \\
&= \Big/_0^1 4(y^3+1)^4 = 4(2^4 - 1^4) = 4 \cdot 15 = 60
\end{aligned}$$



2. a) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa alaspäin aukeava paraboloidipinta $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ ja alhaalta ylöspäin aukeava kartiopinta $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$. Pintojen yhteinen leikkauskäyrä xy-tasossa on $x^2 + y^2 = 3^2$. Kuvaa kappale V sylinterikoordinaattien r, φ ja z avulla. (3p)

b) Olkoon $\vec{v}(x, y, z) = y^2z^3\vec{\imath} + 2xyz^3\vec{\jmath} + 3xy^2z^2\vec{k}$ vektorikenttä. Laske vektorikentän $\vec{v}$ divergenssi $\nabla \cdot \vec{v}$ ja roottori $\nabla \times \vec{v}$. Onko vektorikenttä $\vec{v}$ pyörteetön? (3p)

Ratkaisu:
a) Kappale V sylinterikoordinaateissa on

$$V' = \left\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, r - 3 \le z \le 9 - r^2\right\}.$$

b) Divergenssi:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \partial_x(y^2z^3) + \partial_y(2xyz^3) + \partial_z(3xy^2z^2) = 2xz^3 + 6xy^2z$$

Roottori:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} = (6xyz^2 - 6xyz^2)\vec{\imath} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\vec{\jmath} + (2yz^3 - 2yz^3)\vec{k} = \vec{0}.$$

Koska roottori häviää kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, niin vektorikenttä on pyörteetön.

3. Osoita, että funktio $U(x, y, z) = 2x^2 - 3xz + 4y^2$ on konservatiivisen vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = (4x - 3z)\vec{\imath} + 8y\vec{\jmath} - 3x\vec{k}$ eräs potentiaalifunktio. Olkoon edelleen C käyrä $\vec{x}(t) = (t + 1)\vec{\imath} - 3t\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$ pisteestä $(0, 3, -2)$ pisteeseen $(2, -3, 2)$. Laske käyräintegraalin

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C (4x - 3z)\,\mathrm{d}x + 8y\,\mathrm{d}y - 3x\,\mathrm{d}z$$

arvo **sekä** käyrän C parametriesityksen **että** potentiaalifunktion U avulla.

Ratkaisu:
Koska $\nabla U(x, y, z) = (4x-3z)\vec{\imath}+8y\vec{\jmath}-3x\vec{k} = \vec{F}$, niin U on vektorikentän $\vec{F}$ (eräs) potentiaalifunktio.

1° käyräintegraalin arvo parametriesityksen avulla:
Aloituspiste: yhtälöt $t + 1 = 0$, $-3t = 3$ ja $2t = -2$ toteutuvat, kun $t = -1$. Loppupiste: yhtälöt $t + 1 = 2$, $-3t = -3$ ja $2t = 2$ toteutuvat, kun $t = 1$. Nyt $\vec{x}'(t) = (1, -3, 2)$, joten

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{-1}^{1} [(4(t + 1) - 3 \cdot 2t) \cdot 1 + 8(-3t)(-3) - 3(t + 1) \cdot 2]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} [4t + 4 - 6t + 72t - 6t - 6]\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (64t - 2)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{-1}^{1} (32t^2 - 2t) = 32(1)^2 - 2 - (32(-1)^2 - 2(-1)) = -4.
\end{aligned}$$

2° käyräintegraalin arvo potentiaalifunktion avulla:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= U(2, -3, 2) - U(0, 3, -2) \\
&= 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4(-3)^2 - [2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot (-2) + 4(3)^2] = -4.
\end{aligned}$$

4. Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$, joka on ympyrän osan

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2^2, y \leq 0\}$$

yläpuolella. Pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Laske napakoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = (2y - 3y^2)\vec{\imath} + (xy - 2x)\vec{\jmath} + (-5 - 3y + z)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

Ratkaisu:

Alue A voidaan kuvata napakoordinaateissa $A' = \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2, \pi \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, \mathrm{d}S = \iint_S \frac{2x(2y - 3y^2) + 2y(xy - 2x) + 1(-5 - 3y + z)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, \mathrm{d}S \\
&= \iint_S \frac{4xy - 6xy^2 + 2xy^2 - 4xy - 5 - 3y + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, \mathrm{d}S \\
&= \iint_A [-4xy^2 - 5 - 3y + 5 - x^2 - y^2] \, \mathrm{d}A \\
&= \int_\pi^{2\pi} \int_0^2 [-4r\cos(\varphi) r^2 \sin^2(\varphi) - 3r\sin(\varphi) - r^2] r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_\pi^{2\pi} \int_0^2 [-4r^4 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi) - 3r^2 \sin(\varphi) - r^3] \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_\pi^{2\pi} \Big/_0^2 [-\frac{4}{5} r^5 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi) - r^3 \sin(\varphi) - \frac{1}{4} r^4] \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_\pi^{2\pi} [-\frac{4}{5} \cdot 2^5 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi) - 8\sin(\varphi) - \frac{2^4}{4}] \mathrm{d}\varphi \\
&= \Big/_\pi^{2\pi} [-\frac{4}{5} \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{3} \sin^3(\varphi) + 8\cos(\varphi) - 4\varphi] = 16 - 4\pi
\end{aligned}$$