031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

1. välikoe 09.02.2023

VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k^2}{(k^2+1)^3}$$

suppenemista vertailuperiaatteen avulla. (2p)

b) Osoita integraalitestiä käyttäen, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k-2}$$

hajaantuu. Osoita ensin, että integraalitestin oletukset ovat voimassa. (4p)

Ratkaisu:
a) Kaikilla $k = 1, 2, \ldots$

$$0 < \frac{7k^2}{(k^2+1)^3} < \frac{7k^2}{k^6} = 7\frac{1}{k^4}.$$

Koska vertailusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 7\frac{1}{k^4}$ suppenee (sillä $p = 4 > 1$), niin myös tutkittava sarja suppenee vertailuperiaatteen nojalla.

b) Olkoon $f(x) = \frac{2}{3x-2}$, $x \geq 1$. Funktio f on positiivinen ja jatkuva, kun $x \geq 1$. Lisäksi funktio f on aidosti vähenevä, sillä

$$f'(x) = \frac{-6}{(3x-2)^2} < 0.$$

Täten integraalitestin oletukset ovat voimassa. Nyt

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{2}{3x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \Big/_{\!1}^{M} \frac{2}{3}\ln|3x-2| = \lim_{M\to\infty} \frac{2}{3}(\ln(3M-2) - \ln 0) = \infty,$$

joten epäoleellinen integraali hajaantuu. Täten, integraalitestin nojalla, myös tutkittava sarja hajaantuu.

2. a) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cosh(3x) + 5\cos(x) - 6}.$$

(4p)

b) Määrää potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^7}{7^k} x^k$$

suppenemissäde. (2p)

Ratkaisu:
a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cosh(3x) + 5\cos(x) - 6} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \ldots}{1 + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \ldots + 5(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots) - 6} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots}{1 + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \ldots + 5 - 5\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} - \ldots - 6} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \ldots)}{x^2(\frac{9}{2!} - \frac{5}{2!}) + x^4(\frac{3^4}{4!} + \frac{5x^4}{4!}) + \ldots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \ldots}{\frac{9}{2!} - \frac{5}{2!} + x^2(\frac{3^4}{4!} + \frac{5x^4}{4!}) + \ldots} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^7}{7^{k+1}}}{\frac{k^7}{7^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^7}{7\cdot 7^k} \cdot \frac{7^k}{k^7} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{k+1}{k}\right)^7 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1}\right)^7 = \frac{1}{7},$$

joten potenssisarjan suppenemissäde $R = \frac{1}{L} = 7$.

3. a) Määrää reaaliarvoisen kahden muuttujan funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}-1}$$

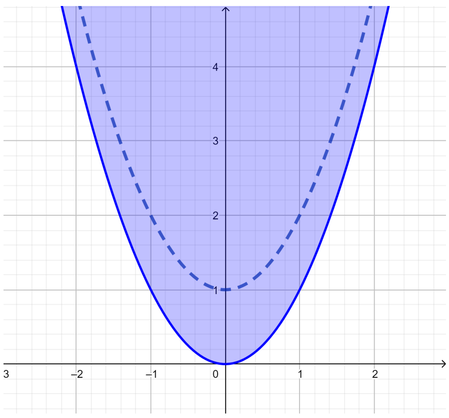
määritysjoukko M_f ja piirrä se xy-tasoon. (3p)

b) Olkoon $g(x,y) = x^3y^5$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(s,t) = st^{-1}$, $y = y(s,t) = t$. Laske osittaisderivaatat $g_x(x,y)$ ja $g_y(x,y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä osittaisderivaatta $\dfrac{\partial g}{\partial t} = g_t$ sievennetyssä muodossa muuttujien s ja t avulla. (3p)

Ratkaisu:

a) Funktio f on määritelty, kun $y - x^2 \geq 0$ ja $\sqrt{y-x^2} - 1 \neq 0$. Siis

$$M_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ ja } y \neq x^2+1\right\}.$$



b) Osittaisderivaatat $g_x(x,y) = 3x^2y^5$ ja $g_y(x,y) = 5x^3y^4$. Ketjusäännöllä

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= 3x^2y^5 \cdot (-st^{-2}) + 5x^3y^4 \cdot 1 \\
&= -3(st^{-1})^2t^5st^{-2} + 5(st^{-1})^3t^4 \\
&= -3s^3t + 5s^3t = 2s^3t
\end{aligned}$$

4. a) Määrää reaaliarvoisen kahden muuttujan funktion $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2$ suunnattu derivaatta pisteessä $(3,0)$ vektorin $\vec{u} = \vec{j}$ suuntaan. (2p)

b) Määrää reaaliarvoisen kahden muuttujan funktion $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2$ kriittiset pisteet ja määrää niiden laatu. (4p)

Ratkaisu:

a) Gradientti $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y)\vec{i} + (-6x+2y)\vec{j}$, $\nabla f(3,0) = (6\cdot 3^2 + 2\cdot 0)\vec{i} + (-6\cdot 3 + 2\cdot 0)\vec{j} = 54\vec{i} - 18\vec{j}$.
Nyt $\|\vec{u}\| = 1$, joten suunnattu derivaatta $\nabla_{\vec{u}} f(3,0) = 54\cdot 0 - 18\cdot 1 = -18$.
b) Kriittiset pisteet toteuttavat ehdon $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, joten saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y &= 0 \\ -6x + 2y &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 &= y \\ -6x + 2y &= 0, \end{cases}$$

joten $-6x + 2x^2 = 0$ eli $2x(-3+x) = 0$, josta edelleen $x = 0$ tai $x = 3$. Siten $y = 0$ tai $y = 9$.
Kriittiset pisteet ovat siis $(0,0)$ ja $(3,9)$.
Nyt funktio f toinen derivaatta

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \text{ erityisesti } H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } H_f(3,9) = \begin{bmatrix} 12\cdot 3 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koska $\det H_f(0,0) = 0\cdot 2 - (-6)(-6) = -36 < 0$, niin piste $(0,0)$ on satulapiste. Koska $\det H_f(3,9) = 36\cdot 2 - (-6)(-6) = 36 > 0$ ja $h_{11} = 36 > 0$, niin piste $(3,9)$ on paikallinen minimipiste.