031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

2. välikoe 03.03.2022, lyhyet ratkaisut

1. Olkoon A se suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $x = 0$, $y = 1$ ja $y = \frac{1}{2}x$ leikatessa toisensa. Laske

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x}^1 6x(y^3+1)^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

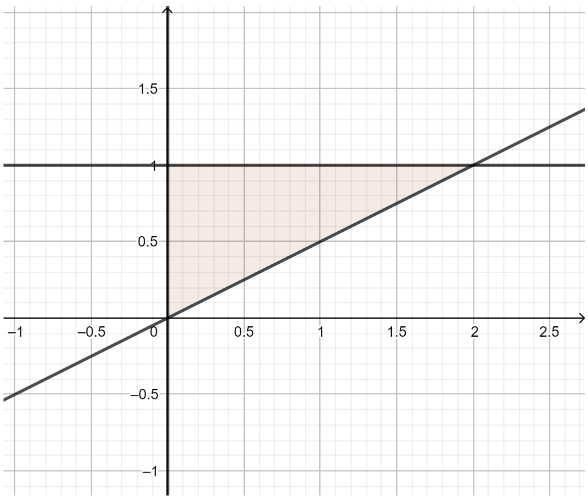
integroimisjärjestystä vaihtamalla. Piirrä kuva tasoalueesta, jonka yli integrointi suoritetaan.

Ratkaisu:
Alue $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le 1\right\}$ voidaan esittää muodossa $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2y, 0 \le y \le 1\right\}$. Tällöin integroimisjärjestystä vaihtamalla saadaan

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x}^1 6x(y^3+1)^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2y} 6x(y^3+1)^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \Big/_{0}^{2y} 3x^2(y^3+1)^3 \, \mathrm{d}y$$

$$= \int 4 \cdot 3y^2(y^3+1)^3 \, \mathrm{d}y = \Big/_{0}^{1} (y+1)^4 = 2^4 - 1^4 = 15$$

Kuva tasoalueesta A:



2. a) Esitä kappale $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1, \ x \le 0, \ y \ge 0, \ z \le 0\right\}$ pallokoordinaattien avulla. (3p)

b) Tutki vektorikentän $\vec{F} = xy\mathrm{e}^z\vec{i} + z\ln(y)\vec{j} + x^2\vec{k}$ pyörteettömyys ja lähteettömyys. (3p)

Ratkaisu:
a) Koska $z \le 0$, niin $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ja koska $x^2+y^2+z^2 \le 1$, niin $\rho \in [0,1]$. Edelleen napakoordinaateista saadaan ehdoista $x \le 0$ ja $y \ge 0$, että $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Täten kappale voidaan esittää pallokoordinaateissa: $V' = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 1, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\right\}$.

b) Lähteettömyys:
$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x(xy\,\mathrm{e}^z) + \partial_y(z\ln(y)) + \partial_z(x^2) = y\,\mathrm{e}^z + \frac{z}{y}$ Koska divergenssi ei häviä kaikkialla, niin kenttä ei ole lähteetön.
Pyörteettömyys:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy\,\mathrm{e}^z & z\ln(y) & x^2 \end{vmatrix} = (0 - \ln(y))\vec{i} - (2x - xy\,\mathrm{e}^z)\vec{j} + (0 - x\,\mathrm{e}^z)\vec{j} \ne \vec{0}.$$

Koska roottori ei häviä kaikkialla, niin kenttä ei ole pyörteetön.

3. a) Laske käyräintegraalin

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C xy \ \mathrm{d}x + (x + 3y^2) \ \mathrm{d}y$$

arvo, kun C on käyrä $\vec{x}(t) = (2t-1)\vec{i} + t^3\vec{j}$, $0 \le t \le 1$. (4p)

b) Osoita, että funktio $U(x,y,z) = xz + z\sin(y) + 2$ on konservatiivisen vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + z\cos(y)\vec{j} + (x+\sin(y))\vec{k}$ (eräs) potentiaalifunktio. (2p)

Ratkaisu:
a) Nyt $\vec{x}'(t) = 2\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^1 [(2t-1)t^3 \cdot 2 + (2t-1+3t^6) \cdot 3t^2] \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 [4t^4 - 2t^3 + 6t^3 - 3t^2 + 9t^8] \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 [9t^8 + 4t^4 + 4t^3 - 3t^2] \ \mathrm{d}t = \Big/_0^1 [t^9 + \frac{4}{5}t^5 + t^4 - t^3] \\
&= 1 + \frac{4}{5} + 1 - 1 - 0 = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

b) Koska $\nabla U = z\vec{i} + z\cos(y)\vec{j} + (x+\sin(y))\vec{k} = \vec{F}$, niin annettu funktio U on todella vektorikentän $\vec{F}$ potentiaalifunktio.

4. Olkoon S se osa pintaa $z = f(x,y) = 21 + 4xy$, joka on ympyräalueen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2 + y^2 \le 9\}$$

yläpuolella. Pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori

$$\vec{n}^0 = \frac{-4y\vec{\imath} - 4x\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}.$$

Laske napakoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = 5x\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + (3z - 53)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{vuo } &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \,\mathrm{d}S = \iint_S \frac{1}{\sqrt{1+16x^2+16y^2}} (5x, -2y, 3z-53) \cdot (-4y, -4x, 1)\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_S \frac{-20xy + 8xy + 3z - 53}{\sqrt{1+16x^2+16y^2}} \,\mathrm{d}S \\
&= \iint_A \frac{-12xy + 3(21+4xy) - 53}{\sqrt{1+16x^2+16y^2}} \sqrt{1+16x^2+16y^2}\,\mathrm{d}A \\
&= \iint_A (12xy + 63 + 12xy - 53)\,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 10r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \Big/_0^3 5r^2 \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 45 \,\mathrm{d}\varphi = 90\pi
\end{aligned}$$