031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

1. välikoe 10.02.2022, lyhyet ratkaisut

1. a) Tutki vertailuperiaatetta käyttäen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5k^3+1}$$

suppenemista. (2p)

b) Tutki integraalitestiä käyttäen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2}{4k^3+1}$$

suppenemista. Osoita tarkasti perustellen, että integraalitestin oletukset ovat voimassa. (4p)

Ratkaisu:

a) Koska kaikilla $k = 1, 2, \dots$

$$0 < \frac{4}{5k^3+1} < \frac{4}{5k^3}$$

ja vertailusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5k^3}$ $(p = 3 > 1)$ suppenee, niin vertailuperiaatteen nojalla tutkittava sarja suppenee.

b) Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{5x^2}{4x^3+1}$, kun $x \geq 1$. Funktio f jatkuva ja positiivinen ko. määritysjoukossa ja edelleen funktio f on aidosti vähenevä, sillä

$$f'(x) = \frac{10x(4x^3+1) - 5x^2 \cdot 12x^2}{(4x^3+1)^2} = \frac{10x(1-2x^3)}{(4x^3+1)^2} < 0.$$

Täten integraalitestin oletukset ovat voimassa. Koska epäoleellinen integraali

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{5x^2}{4x^3+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M \frac{5}{12} \ln(4x^3+1) = \infty$$

hajaantuu, niin integraalitestin nojalla tutkittava sarja hajaantuu.

2. a) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^5 \sinh(x) - \sin(x^6)}{2x^2 - \overline{\text{arc}}\tan(2x^2)},$$

kun tunnetaan sarjakehitelmät

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\overline{\text{arc}}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \ |x| < 1.$$

(4p)

b) Määrää potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k+1} \left(x + \frac{1}{7}\right)^k$$

suppenemissäde R. (2p)

Ratkaisu:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^5 \sinh(x) - \sin(x^6)}{2x^2 - \overline{\text{arc}}\tan(2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^5(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - x^6 + \frac{x^{18}}{3!} + \frac{x^{30}}{5!} - \dots}{2x^2 - 2x^2 + \frac{8x^6}{3} - \frac{2^5 x^{10}}{5} + \dots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3 + \frac{4}{3!}x^2 + \dots}{\frac{8}{3} - \frac{2^5}{5}x^4 + \dots} = \frac{3}{\frac{8}{3}} = \frac{9}{8}$$

b) Koska

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{7^{k+1}}{k+1+1} \cdot \frac{k+1}{7^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{7(k+1)}{k+2} = 7,$$

joten suppenemissäde on $R = \frac{1}{7}$.

3. a) Määrää funktion $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \ln(x^2+y^2-1)$ määritysjoukko M_f. (2p)

b) Määrää reaaliarvoisen kahden muuttujan funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - y^3 + xy - 5x$$

gradientti. Määrää funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(1,1)$ vektorin $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ suuntaan.

Ratkaisu:
a) Funktio f on määritelty, kun $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ ja $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Täten määritysjoukko on

$$M_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2^2\right\}.$$

b) Funktion f gradientti on $\nabla f(x,y) = (6x+y-5)\vec{i} + (-3y^2+x)\vec{j}$. Suunnattu derivaatta

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(1,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2(-2) + (-2)1) = -\frac{6}{\sqrt{5}} = -\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

4. a) Osoita, että kahden muuttujan reaaliarvoisen funktion $f(x,y) = -x^4 - y^4 + 2x - 31y - xy$ eräs kriittinen piste on $(1,-2)$. Tutki ko. pisteen laatu. (3p)

b) Olkoon $f(x,y) = x^2 - 2\sin(y)$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x(t) = t^3$ ja $y(t) = 2t$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ muuttujan t avulla. (3p)

Ratkaisu:
a) Funktion f gradientti on $\nabla f(x,y) = (-4x^3 + 2 - y)\vec{i} + (-4y^3 - 31 - x)\vec{j}$ ja pisteessä $(1,-2)$ gradientti häviää, sillä $\nabla f(1,-2) = (-4+2-(-2))\vec{i} + (-4(-2)^3 - 31 - 1)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}$. Täten piste $(1,-2)$ on funktion f kriittinen piste.
Funktion f Hessen matriisi on

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & -1 \\ -1 & -12y^2 \end{bmatrix} \text{ ja } H_f(1,-2) = \begin{bmatrix} -12 & -1 \\ -1 & -4\cdot 12 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti on $\det H_f(1,-2) = 4(-12)^2 - (-1)^2 > 0$. Koska matriisin $H_f(1,-2)$ alkio $h_{11} = -12 < 0$, niin piste $(1,-2)$ on paikallinen maksimi.

b)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x \cdot 3t^2 - 2\cos(y) \cdot 2 = 6t^5 - 4\cos(2t)$$

031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

1. välikoe 11.02.2022, lyhyet ratkaisut

1. a) Tutki, suppeneeko lukujono

$$\left(\frac{\ln(k^2+1)}{k}\right)_{k=1}^{\infty}. \text{ (2p)}$$

b) Tutki integraalitestiä käyttäen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+2)^3}$$

suppenemista. Osoita tarkasti perustellen, että integraalitestin oletukset ovat voimassa. (4p)

Ratkaisu:
a) Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$, $x \geq 1$. Nyt l'Hospitalin sääntöä käyttäen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+\frac{1}{x}} = 0,$$

joten jono suppenee kohti nollaa.

b) Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$, $x \geq 1$. Funktio f on jatkuva ja positiivinen määritysjoukossaan ja lisäksi se on aidosti vähenevä, sillä

$$f'(x) = \frac{-6}{(x+2)^4} < 0.$$

Integraalitestin oletukset ovat voimassa ja koska epäoleellinen integraali

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M 2(x+2)^{-3}\, \mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M \frac{-1}{(x+2)^2} = -\left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} < \infty$$

suppenee, niin integraalitestin nojalla tutkittava sarja suppenee.

2. a) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8 \sinh(x)}{\overline{\text{arc}}\tan(x^3) - \sin(x^3)},$$

kun tunnetaan sarjakehitelmät

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \; x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \; x \in \mathbb{R},$$
$$\overline{\text{arc}}\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \; |x| < 1.$$

(4p)

b) Suppeneeko potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(k+2)}(x-2)^k$$

pisteessä $x = -2$? Perustele. (2p)

Ratkaisu:
a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8 \sinh(x)}{\overline{\text{arc}}\tan(x^3) - \sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)}{x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} + \ldots - (x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + \ldots)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{3!} + \ldots}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3!} + x^6(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}) + \ldots} = \frac{1}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} = -6$$

b) Koska

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+3)}\cdot\frac{(k+2)3^k}{(-1)^k}\right| = \frac{1}{3},$$

niin potenssisarjan suppenemissäde $R = 3$. Sarja suppenee, kun $-3 < x-2 < 3$ eli $-1 < x < 5$, joten sarja ei suppene pisteessä $x = -2$.

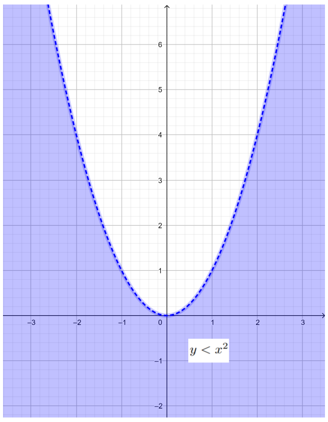
3. a) Määrää kahden muuttujan funktion $z = f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2-y})$ määritysjoukko M_f ja piirrä se xy -tasoon. (3p)

b) Tutki onko seuraava raja-arvo olemassa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+y^2}.$$

Valitse lähestymistieksi origon kautta kulkevat suora $y = 2x$ ja käyrä $y = x^2$. (3p)

Ratkaisu:
a) Funktio f on määritelty, kun $x^2 - y > 0$ eli $M_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < x^2\right\}$.



b) Kun $y = 2x$, niin

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot 2x}{2x^4+(2x)^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x^3}{2x^4+4x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x}{2x^2+2} = 0,$$

ja kun $y = x^2$, niin

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot x^2}{2x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x^4}{2x^4+x^4} = \lim_{x\to0}\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Koska eri lähestymisteitä pitkin saatiin eri tulos, niin raja-arvoa ei ole olemassa.

4. a) Määrää kahden muuttujan funktion $f(x,y) = (x-2)^2y$ gradientti. Laske funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(3,-1)$ vektorin $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ suuntaan. (3p)

b) Olkoon $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x(t) = 3t^{-1}$ ja $y(t) = t^2$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ muuttujan t avulla. (3p)

Ratkaisu:
a) Funktion f gradientti $\nabla f(x,y) = (2(x-2)y)\vec{i} + (x-2)^2\vec{j}$ ja $\nabla f(3,-1) = -2\vec{i} + \vec{j}$. Vektorin $\vec{u}$ pituus on 5, joten $\vec{u}^0 = \frac{1}{5}(4\vec{i} + 3\vec{j})$. Täten

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(3,-1) = \frac{1}{5}(-2,1)\cdot(4,3) = \frac{1}{5}(-8+3) = -1.$$

b) Osittaisderivaatat $f_x(x,y) = 2x + y$ ja $f_y(x,y) = x - 4y$. Ketjusäännöllä

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2x+y)\cdot(-3t^{-2}) + (x-4y)\cdot 2t = -8t^3 + 3 - 18t^{-3}.$$