MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Preppaustehtäviä vanhoista koetehtävistä

1. a) Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+3)^2}-\frac{1}{(k+4)^2}\right]$$

suppenemista osasummien jonon

$$(S_n)_{n=1}^{\infty},\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+3)^2}-\frac{1}{(k+4)^2}\right], n=1,2,3,\dots,$$

avulla. Jos sarja suppenee, laske sarjan summa.

b) Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1})$$

suppenemista osasummien jonon

$$(S_n)_{n=1}^{\infty},\ S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}), n=1,2,3,\dots,$$

avulla. Jos sarja suppenee, laske sarjan summa.

c) Tutki vertailuperiaatteen avulla sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{k}}{2k-1}$ suppenemista.

d) Tutki integraalitestiä käyttäen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\mathrm{e}^{-k}$$

suppenemista. Osoita tarkasti perustellen, että integraalitestin oletukset ovat voimassa.

e) Perustele tarkasti, miksi sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1-2k}$ suppenemista ei voi tutkia tässä muodossa vertailuperiaatteen avulla.

f) Osoita sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}$$

hajaantuvaksi **kahden** eri suppenemistestin avulla.

g) Tutki sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{(k+5)^2}$ suppenemista **kahden** eri suppenemistestin avulla.

h) Sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ termeille on voimassa $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{1}{2}$. Mitä sarjan suppenemisesta voidaan päätellä? Perustele.

2. a) Potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k+1}(x-\frac{1}{5})^k$$

suppenemissäde $R=\frac{1}{5}$. Millä reaaliluvun x arvoilla potenssisarja varmasti suppenee?

b) Määrää potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} x^k$$

suppenemissäde R. Suppeneeko potenssisarja pisteessä $x = -2$? Miksi?

c) Määrää potenssisarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k(k+1)}{2^k}(x+3)^k$ suppenemissäde R.

3. a) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvot

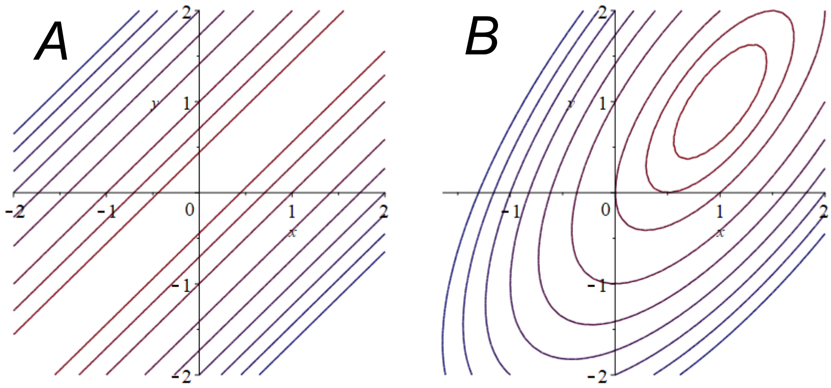
i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\ln(1+x^3)}$, ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(1+x)}{x\cos(3x) - \sin(x)}$.

b) Funktion f Taylorin polynomi pisteessä x_0 lasketaan kaavalla

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Laske funktiolle $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ Taylorin polynomi $T_1(x)$ kehityskeskuksena $x_0 = 0$. Arvioi funktion arvoa $f(0.331)$ saadun Taylorin polynomin avulla.

4. a) Oheisessa kuvassa on esitetty kahden funktion tasa-arvokäyriä. Kumpi kuvista vastaa funktion $f(x,y) = (x-y)^2$ tasa-arvokäyriä? Perustele tarkasti.



b) Tutki funktion

$$f(x,y) = \frac{6x^2y^4}{x^3 + 3y^{12}}$$

raja-arvoa origossa, kun lähestymistieksi valitaan $y = x$ ja $y = \sqrt[4]{x}$. Onko raja-arvo olemassa?

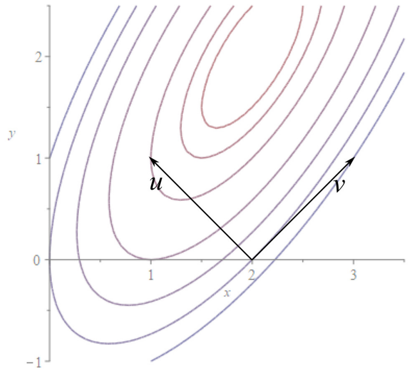
5. a) Laske funktion $f(x,y) = -2x^2 + y^3$ suunnattu derivaatta pisteessä $(-1,2)$ vektorin $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ suuntaan $(\nabla_{\vec{u}^0} f(-1,2))$.

b) Laske funktion $f(x,y) = (x-2)^5 y$ suunnattu derivaatta pisteessä $(3,-1)$ vektorin $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ suuntaan $(\,\nabla_{\vec{u}^0} f(3,-1)\,)$.

c) Määrää funktion $f(x,y) = x\ln(y^2+1)$ suunnattu derivaatta pisteessä $(1,-1)$ vektorin $4\vec{i} - 3\vec{j}$ suuntaan.

d) Olkoon funktio $f(x, y) = 4x^2y - xy^3 - 5$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Laske gradientti $\nabla f(x, y)$. Määrää funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(-1, 2)$ vektorin $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j}$ suuntaan. Mihin suuntaan funktion f arvot vähenevät voimakkaimmin pisteessä $(-1, 2)$?

e) Oheisessa kuvassa on esitetty funktion f tasa-arvokäyriä sekä pisteeseen $(2, 0)$ piirretyt vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$. Kumpi vektoreista osoittaa suuntaan mihin funktion arvot vähenevät voimakkaimmin pisteessä $(2, 0)$ ja kumpi suuntaan mihin funktion arvot muuttuvat vähiten pisteessä $(2, 0)$? Perustele väittämäsi.



6. a) Olkoon $f(x, y) = 3\ln(x+1) - e^{y-2}$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(t) = t-1$, $y = y(t) = t^2 + 2$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = f(x(t), y(t))$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ muuttujan t avulla.

   b) Olkoon $f(x, y) = xy^{-1}$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(s, t) = t\,e^s$ ja $y = y(s, t) = t\,e^{-s}$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä osittaisderivaatta $\frac{\partial z}{\partial t} = z_t$ muuttujien s ja t avulla sievennetyssä muodossa.

   c) Olkoon $f(x, y) = xe^x - \frac{1}{7}y^7$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(t) = \ln(t)$ ja $y = y(t) = \sqrt[3]{t}$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = f(x(t), y(t))$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ muuttujan t avulla sievennetyssä muodossa.

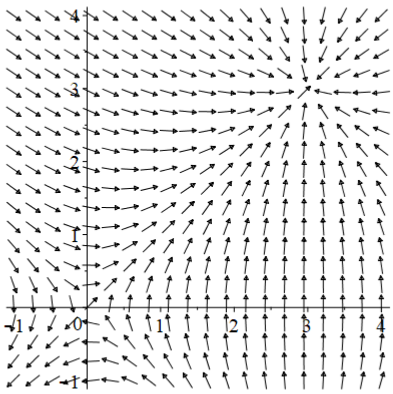
7. a) Funktion $f(x, y) = 12xy - 3xy^2 - x^3$ kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(-2, 2)$ ja $(2, 2)$. Tutki, mitkä näistä kriittisistä pisteistä ovat satulapisteitä.

   b) Funktion $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + y^2 - 4$ kriittiset pisteet ovat $(-2, 0)$ ja $(1, 0)$. Määrää perustellen näiden kriittisten pisteiden laatu.

   c) Funktion $f(x, y) = 12xy - 3x^2y - y^3$ kriittiset pisteet ovat $(4, 0)$ ja $(2, -2)$. Näytä laskemalla, että $\nabla f(4, 0) = \vec{0}$ ja $\nabla f(2, -2) = \vec{0}$. Määrää myös näiden kriittisten pisteiden laatu.

   d) Määrää funktion $f(x, y) = 2x^2 - 2x^2y + y^2$ kaikki kriittiset pisteet sekä tutki perustellen niiden laatu.

   e) Oheisessa kuvassa on kuvattuna erään funktion g gradientteja (vektorit on normeerattu samanmittaisiksi). Funktiolla on kriittiset pisteet kohdissa $(0, 0)$ ja $(3, 3)$. Päättele kuvan avulla niiden laatu. Perustele.



8. a) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $x = 0$ ja $y = 2$ sekä käyrän $y = \sqrt{x}$ leikatessa toisensa. Laske

$$\iint_A 6xy \, \mathrm{d}A.$$

b) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = x$, $y = -x + 2$ ja $y = 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A sekä esitä alue A muodossa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d, \; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

missä c ja d ovat reaalilukuja sekä $g_1(y)$ ja $g_2(y)$ muuttujasta y riippuvia funktioita. Laske

$$\iint_A \frac{2}{-y^2 + 2y + 4} \, \mathrm{d}A.$$

c) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = x - 2$, $y = \frac{1}{2}x$ ja $y = 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja esitä alue A muodossa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d, \; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

missä c ja d ovat reaalilukuja sekä $g_1(y)$ ja $g_2(y)$ muuttujasta y riippuvia funktioita. Laske

$$\iint_A 12x(-y^3 + 2y^2 + 4y)^5 \, \mathrm{d}A.$$

9. a) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu käyrän $y = \sqrt{x}$ sekä suorien $y = 2$ ja $x = 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva integrointialueesta ja laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{y^3 + 1} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

b) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $x = 0$, $y = 6$ ja $y = 3x$ leikatessa toisensa. Laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^2 \int_{3x}^6 54x(y^3 + 1)^{-2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

c) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = 2$ ja $x = 0$ sekä käyrän $y = \sqrt{x}$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 84x^2(y^7+1)^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

d) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu kolmioalue, joka muodostuu suorien $y = -\frac{1}{4}x$, $y = 1$ ja $x = 0$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_{-4}^0 \int_{-\frac{x}{4}}^1 3x^2 \, \mathrm{e}^{-y^4} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

10. a) Olkoon A se suljettu ja rajoitettu alue xy-tasossa, joka voidaan kuvata napakoordinaattien avulla muodossa

$$\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 4, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Laske napakoordinaattien avulla

$$\iint_A \frac{2x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}A.$$

b) Olkoon A se suljettu ja rajoitettu alue xy-tasossa, joka voidaan kuvata napakoordinaattien avulla muodossa

$$\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2, \pi \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Laske napakoordinaattien avulla

$$\iint_A \frac{2x-3y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}A.$$

c) Laske napakoordinaattien avulla

$$\int_{-3}^0 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{4}{4+x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

d) Laske napakoordinaattien avulla

$$\int_{-4}^0 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^0 \frac{2}{x^2+y^2+2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

e) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu ympyrän kaaren $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$, sekä suorien $y = 2$, $y = 0$ ja $x = -3$ leikatessa toisensa. Laske

$$\iint_A 3(x^2+y^2) \, \mathrm{d}A.$$

Opastus: Jaa alue A kahteen osaan, joista toiseen sovellat napakoordinaatteja r ja φ.

11. a) Olkoon V suljettu kappale, joka voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla muodossa

$$\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 5, 0 \le \varphi \le 2\pi, r - 5 \le z \le 25 - r^2\}.$$

Laske sylinterikoordinaattien avulla integroimalla kappaleen V tilavuus.

b) Olkoon V suljettu kappale, joka voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla muodossa $\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le z \le 3 - r\}$. Laske sylinterikoordinaattien avulla

$$\iiint_V 20z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}V.$$

c) Laske integroimalla sylinterikoordinaattien avulla sen kappaleen tilavuus, jota ylhäältä ja sivuilta rajoittaa paraboloidipinta $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ ja alhaalta taso $z = 0$.

d) Kappaletta rajoittaa ylhäältä paraboloidipinta $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ ja alhaalta kartiopinta $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$. Laske sylinterikoordinaattien avulla kappaleen tilavuus.

12. a) Olkoon $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{i} + (y^2 - z^2)\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ vektorikenttä sekä $f(x, y, z) = 3x^2 - 4y^3 + 2z$ kolmen muuttujan reaaliarvoinen funktio. Muodosta vektorikentät $\nabla \times \vec{F}$ sekä ∇f.

b) Olkoon C käyrä $\vec{x}(t) = (3t - 1)\vec{i} + 4t\vec{j} + (t - 2)\vec{k}$ pisteestä $(-1, 0, -2)$ pisteeseen $(2, 4, -1)$. Tarkastellaan käyräintegraalin

$$\int_C 2xy\ \mathrm{d}x - y(z + 2)\ \mathrm{d}y + 4y\ \mathrm{d}z$$

arvon laskemista. Laske käyräintegraalin arvo käyrän C parametriesityksen avulla. Tutki, voidaanko käyräintegraalin arvo laskea myös potentiaalifunktion $U(x, y, z)$ avulla. Mahdollista potentiaalifunktiota $U(x, y, z)$ ei tarvitse määrätä.

c) Olkoon C käyrä $\vec{x}(t) = te^t\vec{i} + 2\sqrt{t}\vec{j}$, $0 \le t \le 1$. Laske käyräintegraalin

$$\int_C (2x - 3x^2y)\ \mathrm{d}x + (-x^3 + 3y^2)\ \mathrm{d}y$$

arvo potentiaalifunktion $U(x, y)$ avulla.

d) Olkoon C käyrä $\vec{x}(t) = 2t\vec{i} - t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$, $-1 \le t \le 0$. Määrää konservatiivisen vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y + 4z)\vec{i} + (2x - 3y - z)\vec{j} + (4x - y + 2z)\vec{k}$ potentiaalifunktio $U(x, y, z)$ ja laske käyräintegraalin

$$\int_C (x + 2y + 4z)\ \mathrm{d}x + (2x - 3y - z)\ \mathrm{d}y + (4x - y + 2z)\ \mathrm{d}z$$

arvo tämän potentiaalifunktion avulla.

e) Olkoon $a > 0$ ja C käyrä $\vec{x}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$ pisteestä $(a, 0)$ pisteeseen $(-a, 0)$. Laske käyräintegraalin

$$I = \int_C (x - y)\,\mathrm{d}x + (y^3 + x)\,\mathrm{d}y$$

arvo käyrän C parametriesityksen avulla.

Laske vektorikentän $\vec{F}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ divergenssi.

13. a) Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial A} (-4xy)\ \mathrm{d}x + (5x - y^2)\ \mathrm{d}y,$$

kun A on se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu paraabelin $y = 3x^2$ sekä suoran $y = 3$ leikatessa toisensa.

b) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = 2x$, $y = 2$, $y = 0$ ja $x = -1$ leikatessa toisensa. Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial A} (xy^2 - 3x^2)\ \mathrm{d}x + (3xy + 7y)\ \mathrm{d}y.$$

c) Laske Greenin lauseen ja napakoordinaattien avulla

$$\oint_{\partial A} (-8x^2y)\ \mathrm{d}x + 8xy^2\ \mathrm{d}y,$$

kun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x \leq 0, y \geq 0\}$.

d) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4x^3\}$ xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, jonka reunakäyrä on ∂A. Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial A} (x^2 + 7xy^2)\ \mathrm{d}x + (9x^2y - y^5)\ \mathrm{d}y.$$

Onko vektorikenttä $\vec{F}(x, y) = (x^2 + 7xy^2)\vec{i} + (9x^2y - y^5)\vec{j}$ konservatiivinen?

14. a) Laske pintaintegraali

$$\iint_S \sqrt{4z - 11}\,\mathrm{d}S,$$

kun S on se osa paraboloidipintaa $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$, joka jää suorakulmion $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\big\}$ yläpuolelle.

b) Laske pintaintegraali

$$\iint_S 6\sqrt{17 - 4z}\,\mathrm{d}S,$$

kun S on se osa paraboloidipintaa $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, joka jää kolmion $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\big\}$ yläpuolelle.

15. a) Olkoon S se osa pintaa $z = f(x, y) = 7 + 3xy$, joka on tasoalueen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

yläpuolella. Määrää pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}^0$ ja laske vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + (-6y)\vec{j} + (4z - 28)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

b) Olkoon S se osa pintaa $z = f(x, y) = 3xy + 1$, joka on tasoalueen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

yläpuolella. Määrää pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}^0$ ja laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = -4xz\vec{i} + (4yz - 3y)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

c) Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x,y) = 6 - x^2 - y^2$, joka on tasoalueen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}$$

yläpuolella. Määrää muuttujista x ja y riippuva esitys pinnan S ulkoiselle yksikkönormaalivektorille $\vec{n}^0$. Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (5y - 3yz)\vec{i} + (-5x + 3xz)\vec{j} + (6x - xz)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

d) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = 5x$, $x = 1$ ja $y = 0$ leikatessa toisensa. Olkoon edelleen S se osa funktiopintaa $z = f(x,y) = 2xy + 17$, joka on alueen A yläpuolella. Määrää pinnan S ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}^0$ ja laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (3x - 5xz)\vec{i} + (5yz - 8y)\vec{j} + (3z - 51)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

16. a) Olkoon neliö $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$ xy-tason suljettu ja rajoitettu alue. Olkoon edelleen pinta S se osa funktiopintaa $z = f(x,y) = xy$, joka on tasoalueen A yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(-y, -x, 1)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Pinnan S suljettu reunakäyrä olkoon ∂S. Laske käyräintegraalin

$$\oint_{\partial S} (5y + 3z^2)\ \mathrm{d}x + (5x + 4z^2)\ \mathrm{d}y + (6xz + 2yz)\ \mathrm{d}z$$

arvo Stokesin lauseen avulla.

b) Olkoon $\vec{F}(x,y,z) = (6y^2 + 7xyz)\vec{i} + 12xy\vec{j} + 7xz\vec{k}$ vektorikenttä. Olkoon edelleen pinta S se osa funktiopintaa $z = f(x,y) = 15 + 2xy$, joka on tasoalueen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -5x \le y \le 2\sqrt{x}\}$$

yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(-2y, -2x, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Pinnan S suljettu reunakäyrä olkoon ∂S. Muodosta vektorikenttä $\nabla \times \vec{F}$ ja laske käyräintegraalin

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \oint_{\partial S} (6y^2 + 7xyz)\ \mathrm{d}x + 12xy\ \mathrm{d}y + 7xz\ \mathrm{d}z$$

arvo Stokesin lauseen avulla.

17. a) Olkoon

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x, -1 \le z \le 2\}$$

suljettu kappale. Laske divergenssilauseen avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (7xz - 3x + 4)\vec{i} + (3y - 7yz - 2)\vec{j} + 8xyz^2\vec{k}$ vuo suljetun kappaleen V pinnan S läpi.

b) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa paraboloidipinta $S_1 : z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ ja alhaalta taso $S_2 : z = g(x,y) = 0$. Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (-4x + y)\vec{i} + (5x + 4y)\vec{j} + (4z^3 - 2xy)\vec{k}$ vuo kappaleen V pinnan $S = S_1 \cup S_2$ läpi divergenssilauseen ja sylinterikoordinaattien avulla.

c) Olkoon V suljettu kappale, jota alhaalta rajoittaa paraboloidipinta $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ja ylhäältä taso $z = g(x,y) = 0$. Laske divergenssilauseen ja sylinterikoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (6x - yz)\vec{i} + (3xz - 6y)\vec{j} + (z^4 - 5xy)\vec{k}$ vuo kappaleen V pinnan läpi.

Vastauksia

1. a) sarja suppenee, sarjan summa $\frac{1}{16}$ b) hajaantuu c) hajaantuu d) suppenee

2. a) $0 < x < \frac{2}{5}$ b) $R = 4$, $x = -2$ kuuluu välille ($|x| < 4$), jossa potenssisarja suppenee c) $R = 2$

3. a) $-\frac{1}{3}$ b) $-\frac{3}{13}$ c) -6 d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{27}$ f) $\frac{4}{15}$

4. -

5. a) i) $-4\sqrt{5}$, ii) $4\frac{3}{5}$ b) $T_1(x) = 1 + \frac{1}{3}x$

6. a) $f_x(x,y) = \frac{3}{x+1}$, $f_y(x,y) = -\,\mathrm{e}^{y-2}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3t^{-1} - 2t\,\mathrm{e}^{t^2}$
   b) $f_x(x,y) = y^{-1}$, $f_y(x,y) = -xy^{-2}$, $\frac{\partial z}{\partial t} = z_t = 0$
   c) $f_x(x,y) = (x+1) + \mathrm{e}^x$, $f_y(x,y) = -y^6$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \ln(t) + 1 - \frac{t\sqrt[3]{t}}{3}$

7. a) pisteet $(0,0)$ ja $(0,4)$ satulapisteitä
   b) piste $(-2,0)$ satulapiste, piste $(1,0)$ paikallinen minimipiste
   c) piste $(4,0)$ satulapiste, piste $(2,-2)$ paikallinen minimipiste
   d) pisteet $(-1,1)$ ja $(1,1)$ satulapisteitä, piste $(0,0)$ paikallinen minimipiste

8. a) 32 b) $2\ln(\frac{5}{4})$ c) 262144

9. a) $\ln(9)$ b) $\frac{216}{217}$ c) 276922880 d) $16(1 - \mathrm{e}^{-1})$

10. a) 6 b) 6 c) $\pi\ln(\frac{13}{4})$ d) $\frac{\pi}{2}\ln(9)$ e) $78 + 6\pi$

11. a) $\frac{2125\pi}{6}$ b) 81π c) $\frac{81\pi}{2}$ d) $\frac{32\pi}{3}$

12. a) $\nabla \times \vec{F} = 3z\vec{i} - x\vec{k} = (3z, 0, -x)$, $\nabla f = 6x\vec{i} - 12y^2\vec{j} + 2\vec{k} = (6x, -12y^2, 2)$
    b) $14\frac{2}{3}$, ei voi laskea
    c) $U(x,y) = x^2 - x^3y + y^3 + C$, käyräintegraalin arvo $=\ \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^3 + 8$
    d) $U(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + C$, käyräintegraalin arvo $= -34\frac{1}{2}$,
    e) $a^2\pi$, divergenssi $1 + 3y^2$

13. a) 20 b) 11 c) 625π d) $\frac{243\pi - 144}{4}$

14. a) 43 b) 11

15. a) 6 b) 6 c) $\frac{14}{15}$ d) 50

16. a) 21 b) 259

17. a) 243 b) 256π c) $-\frac{1024\pi}{5}$