**031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II**

**Ratkaisut 3. välikokeeseen 27.02.2020**

1. a) Kappale $V$ kuvattuna sylinterikoordinaateissa:

$$V' = \Big\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le r\le\sqrt{7}, 0\le\varphi\le 2\pi, r^2-7\le z\le 7-r\Big\}.$$

Kappaleen tilavuus

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}}\int_{r^2-7}^{7-r} r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}} \Big/_{r^2-7}^{7-r} rz\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\,\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}} r[7-r^2-(r^2-7)]\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{7}} (-r^3-r^2+14r)\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big/_0^{\sqrt{7}} (-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3+7r^2)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(-\frac{49}{4}-\frac{7\sqrt{7}}{3}+49)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{7}{6}(63-4\sqrt{7})\pi.
\end{aligned}$$

b) Käyrän parametriesityksestä saadaan $t_0 = 0$ ja $t_1 = \pi$ ja $\vec{x}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j}$. Käyräintegraalin arvo

$$\begin{aligned}
\int\limits_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (y^3+x)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi} [(a\cos(t)-a\sin(t))(-a\sin(t)) + (a^3\sin^3(t)+a\cot(t))(a\cos(t))]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} [-a^2\sin(t)\cos(t) + a^2\sin^2(t) + a^3\sin^3(t)\cos(t) + a^2\cos^2(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} [a^2 - a^2\sin(t)\cos(t) + a^3\sin^3(t)\cos(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_0^{\pi}\ a^2t - \frac{a^2}{2}\sin^2(t) + \frac{a^3}{4}\sin^4(t) = a^2\pi.
\end{aligned}$$

Vektorikentän divergenssi $\mathrm{div}\vec{F} = (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(x-y, y^3+x, 0) = 1+3y^2$.

2. a) Greenin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial A} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x} &= \iint\limits_A (Q_x-P_y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^{4x^3}(18xy-14xy)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big/_0^{4x^3}\ 2xy^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 32x^7\ \mathrm{d}x = \Big/_0^1\ 4x^8 = 4.
\end{aligned}$$

Vektorikenttä ei ole konservatiivinen, sillä yllä olevan käyräintegraalin arvo suljetun käyrän yli eroaa nollasta.

b) Alue $A$ napakoordinaateissa on $A' = \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(3y-2y^2, 2xy-3x, 6-3y-z)\cdot(2x,2y,1)\,\mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_S \frac{6-3y-z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_A \frac{6-3y-(6-x^2-y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,\mathrm{d}A \\
&= \iint\limits_A (-3y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}A = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int\limits_0^2 (-3r\sin\varphi + r^2)r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big/_{\!0}^{2} (-r^3\sin\varphi + \frac{1}{4}r^4)\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-8\sin\varphi+4)\,\mathrm{d}\varphi = \Big/_{\!\frac{\pi}{2}}^{\pi} 8\cos\varphi + 4\varphi = 2\pi - 8.
\end{aligned}
$$