

## 031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

### 3. välikoe 27.02.2020

#### VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Olkoon  $V$  suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa alaspäin aukeava kartiopinta  $z = f(x, y) = 7 - \sqrt{x^2 + y^2}$  ja alhaalta ylöspäin aukeava paraboloidipinta  $z = g(x, y) = x^2 + y^2 - 7$ . Pintojen yhteinen leikkauskäyrä  $xy$ -tasossa on  $x^2 + y^2 = 7$ . Kuvaa kappale  $V$  sylinterikoordinaattien  $r$ ,  $\varphi$  ja  $z$  avulla sekä laske sylinterikoordinaattien avulla integroimalla kappaleen tilavuus. (4p)

b) Olkoon  $a > 0$  ja  $C$  käyrä  $\vec{x}(t) = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j}$  pisteestä  $(a, 0)$  pisteeseen  $(-a, 0)$ . Laske käyräintegraalin

$$I = \int_C (x - y) dx + (y^3 + x) dy$$

arvo käyrän  $C$  parametriesityksen avulla. (3p)

Laske vektorikentän  $\vec{F}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$  divergenssi. (1p)

2. a) Olkoon  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4x^3\}$   $xy$ -tason suljettu ja rajoitettu alue, jonka reunakäyrä on  $\partial A$ . Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint_{\partial A} (x^2 + 7xy^2) dx + (9x^2y - y^5) dy. \quad (3p)$$

Onko vektorikenttä  $\vec{F}(x, y) = (x^2 + 7xy^2)\vec{i} + (9x^2y - y^5)\vec{j}$  konservatiivinen? (1p)

b) Olkoon  $S$  se osa paraboloidipintaa  $z = f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ , joka on ympyrän osan

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2^2, x \leq 0, y \geq 0\}$$

yläpuolella. Pinnan  $S$  ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Laske napakoordinaattien avulla vektorikentän  $\vec{F}(x, y, z) = (3y - 2y^2)\vec{i} + (2xy - 3x)\vec{j} + (6 - 3y - z)\vec{k}$  vuo pinnan  $S$  läpi. (4p)

KAAVAKOKOELMA LIITTEENÄ

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\overline{\text{arc}} \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \theta \quad \oint_{\partial A} P dx + Q dy = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_A F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS \quad \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \quad D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad Dx^n = nx^{n-1}$$

$$D([f(x)]^n) = n[f(x)]^{n-1}f'(x) \quad D e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x) \quad D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D \overline{\text{arc}} \tan x = \frac{1}{1+x^2} \quad D \sin x = \cos x \quad D \cos x = -\sin x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \overline{\text{arc}} \tan x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$