031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 2. välikokeeseen 06.02.2020

1. a) Funktion $f(x,y) = 4x^2y - xy^3 - 5$ gradientti on

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 8xy - y^3 \\ 4x^2 - 3xy^2 \end{bmatrix}.$$

Normeerataan vektori $\vec{u}$:

$$\vec{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Gradientti pisteessä $(-1,2)$:

$$\nabla f(-1,2) = \begin{bmatrix} -8 \cdot 2 - 8 \\ 4 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Suunnattu derivaatta pisteessä $(-1,2)$ on vektorien $\nabla f(-1,2)$ ja $\vec{u}^0$ pistetulo:

$$\nabla_{\vec{u}^0} f(-1,2) = -24 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 16 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Funktion arvot vähenevät voimakkaimmin pisteessä $(-1,2)$ negatiivisen gradientin suuntaan eli suuntaan $-\nabla f(-1,2) = 8 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b) Osittaisderivaatat g_x ja g_y funktiolle $g(x,y) = x^3y^4$ ovat

$$g_x = 3x^2y^4 \text{ ja } g_y = 4x^3y^3.$$

Ketjusäännöllä

$$\begin{aligned} z_t &= g_x x_t + g_y y_t = 3x^2y^4 \cdot 2st + 4x^3y^3 \cdot (-1)t^{-2} \\ &= 3(st^2)^2 t^{-4} \cdot 2st + 4(st^2)^3 t^{-3}(-1)t^{-2} = 6s^3t - 4s^3t = 2s^3t. \end{aligned}$$

c) Tasoalue $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 2x\big\}$. Integraali

$$\begin{aligned} \iint_A 48y^2(1-x^4)^3 \mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_x^{2x} 48y^2(1-x^4)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\Big/_{x}^{2x} 16y^3(1-x^4)^3 \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 16\left(8x^3 - x^3\right)(1-x^4)^3 \mathrm{d}x = -4 \cdot 7 \int_0^1 (-4x^3)(1-4x^4)^3 \mathrm{d}x \\ &= -7 \Big/_{0}^{1} (1-x^4)^4 = 7 \end{aligned}$$