031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 1. välikokeeseen 23.01.2020

1. a) Vertailuperiaate: kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\frac{3}{5\sqrt{k}-2} > \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Vertailusarja hajaantuu $p = \frac{1}{2} < 1$, joten vertailuperiaatteen nojalla tutkittava sarja hajaantuu.

b) Nyt $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 1$. Integraalitestin oletukset ovat voimassa, sillä

- $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ kaikilla $x \geq 1$,
- f on jatkuva,
- $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x) \leq 0$ kaikilla $x \geq 1$ (ja derivaatan ainoa nollakohta on kun $x = 1$), joten f on aidosti vähenevä.

Epäoleellinen integraali

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \left(\Big/_1^M x(-\mathrm{e}^{-x}) + \int_1^M \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{M\to\infty} (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{M\to\infty} \big((-M-1)\,\mathrm{e}^{-M} - (-1-1)\,\mathrm{e}^{-1}\big) = \frac{2}{\mathrm{e}} < \infty$$

suppenee, joten integraalitestin nojalla tutkittava sarja suppenee.

c) Koska suppenemisväli on $0 < x < \frac{1}{3}$, niin vähentämällä puolittain $\frac{1}{6}$ saadaan

$$-\frac{1}{6} < x - \frac{1}{6} < \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \text{ eli } -\frac{1}{6} < x - \frac{1}{6} < \frac{1}{6}$$

eli suppenemissäde $R = \frac{1}{6}$.

d) Nyt $n = 1$ ja edelleen $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$ ja $f'(0) = \frac{1}{3}$. Sijoitetaan nämä suoraan annettuun kaavaan, jolloin

$$T_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} = 1 + \frac{1}{3}x.$$

Funktion f arvon arviointi kun $x = 0.331$:

$$f(0.331) \approx T_1(0.331) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.331 = 1.110333.$$