031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 3. välikokeeseen 28.2.2019

1. a) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa pallopinta $z = f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ ja alhaalta taso $z = g(x, y) = 0$ sekä sivuilta lieriöpinta $x^2 + y^2 = 2^2$. Kuvaa kappale V sylinterikoordinaattien r, φ ja z avulla sekä laske sylinterikoordinaattien avulla integraali

$$\iiint_V 3z^3 \, dV.$$

b) Laske sen kappaleen tilavuus, jota ylhäältä rajoittaa pinta $z = f(x, y) = 2xy^3 + 1$, alhaalta pinta $z = g(x, y) = -2xy^3 - 1$ sekä sivuilta pinnat $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ ja tasot $x = 0$, $x = 1$.

1. a) Kappale V sylinterikoordinaateissa:

$$V' = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le \sqrt{5 - r^2}\}.$$

$$\iiint_V 3z^3 \, dV = \iiint_{V'} 3z^3 \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{5-r^2}} 3rz^3 \, dz \, dr \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \Big/_{0}^{\sqrt{5-r^2}} \frac{3}{4} rz^4 \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{3}{4} r(5 - r^2)^2 \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{2} (-\frac{1}{8})(5 - r^2)^3 \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{125 - 1}{8} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{31}{2} \, d\varphi = 31\pi$$

b) Kappale voidaan kuvata seuraavasti:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x^2 + 1, -2xy^3 - 1 \le z \le 2xy^3 + 1\}.$$

Lasketaan kappaleen tilavuus:

$$\iiint_V 1 \, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \int_{-2xy^3-1}^{2xy^3+1} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \Big/_{-2xy^3-1}^{2xy^3+1} z \, dy \, dx$$
$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} (2xy^3 + 1 - (-2xy^3 - 1)) \, dy \, dx = \int_0^1 \Big/_{x^2}^{x^2+1} (xy^4 + 2y) \, dx$$
$$= \int_0^1 [x(x^2 + 1)^4 + 2(x^2 + 1) - x(x^2)^4 - 2(x^2)] \, dx = \int_0^1 [x(x^2 + 1)^4 + 2 - x^9] \, dx$$
$$= \Big/_{0}^{1} [\frac{1}{10}(x^2 + 1)^5 + 2x - \frac{1}{10} x^{10}] = \frac{32}{10} + 2 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 5.$$

2. a) Olkoon $\vec{F}(x,y,z) = (12x^2y^2+5z)\vec{i} + (8x^3y - 3z^2)\vec{j} + (5x - 6yz - 7)\vec{k}$ vektorikenttä ja C käyrä $\vec{x}(t) = (3t^3-1)\vec{i} + (t^2-1)e^{t^3+t}\vec{j} + t\cos(\pi t)\vec{k}$, $0 \le t \le 1$. Laske vektorikentän $\vec{F}$ divergenssi $\nabla \cdot \vec{F}$ ja roottori $\nabla \times \vec{F}$. Onko vektorikentällä $\vec{F}(x,y,z)$ potentiaalifunktio $U(x,y,z)$? Perustelu. Jos potentiaalifunktio $U(x,y,z)$ on olemassa, niin kirjoita laskukaava käyräintegraalin

$$\int\limits_C (12x^2y^2+5z)\,dx + (8x^3y-3z^2)\,dy + (5x-6yz-7)\,dz = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{x}$$

laskemiseksi tämän potentiaalifunktion avulla. Mahdollista potentiaalifunktiota $U(x,y,z)$ ei tarvitse määrätä.

b) Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$, joka on ympyrärenkaan osan

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1^2 \le x^2+y^2 \le 2^2, x \le 0, y \ge 0\}$$

yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Laske napakoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = 4yz\vec{i} - 4xz\vec{j} + (5y - yz)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

2. a)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^2+5z) + \frac{\partial}{\partial y}(8x^3y-3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(5x-6yz-7)\\ &= 24xy^2 + 8x^3 - 6y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 12x^2y^2+5z & 8x^3y-3z^2 & 5x-6yz-7 \end{vmatrix}\\ &= (-6z+6z)\vec{i} - (5-5)\vec{j} + (24x^2y - 24x^2y)\vec{k}\\ &= \vec{0} = (0,0,0)\end{aligned}$$

Potentiaalifunktio $U(x,y,z)$ on olemassa, sillä $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ kaikilla $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Käyrän C parametriesityksestä seuraa, että $\vec{x}(0) = (-1,-1,0)$ (alkupiste) ja $\vec{x}(1) = (2,0,-1)$ (loppupiste). Näin ollen

$$\begin{aligned}&\int\limits_C (12x^2y^2+5z)\,dx + (8x^3y-3z^2)\,dy + (5x-6yz-7)\,dz = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{x}\\ &= U(2,0,-1) - U(-1,-1,0).\end{aligned}$$

b) Alue A napakoordinaatistossa:

$$A' = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_S (4yz, -4xz, 5y - yz) \cdot \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS \\
&= \iint_S \frac{8xyz - 8xyz + 5y - yz}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS = \iint_S \frac{5y - yz}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS \\
&= \iint_A \frac{5y - y(5 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA = \iint_A y(x^2 + y^2) \, dA \\
&= \iint_{A'} r \sin(\varphi) r^2 \, r \, dr \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 r^4 \sin(\varphi) \, dr \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big/_1^2 \frac{r^5}{5} \sin(\varphi) \, d\varphi \\
&= \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{31}{5}(-\cos(\varphi)) = 6\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$