031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 2. välikokeeseen 7.2.2019

1. a) Olkoon $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 + 1$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x = x(s,t) = 2st$ ja $y = y(s,t) = t^2 - s^2$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä osittaisderivaatta $\frac{\partial z}{\partial s} = z_s$ muuttujien s ja t avulla sievennetyssä muodossa.

   b) Määrää reaaliluku $a \neq 0$ siten, että funktion $f(x,y) = x^5 e^{y^2 - 3y}$ suunnattu derivaatta pisteessä $(a, 0)$ vektorin $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ suuntaan saa arvon nolla ($\nabla_{\vec{u}^0} f(a,0) = 0$).

   c) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = x$, $y = \dfrac{1}{2}x$ ja $y = 2$ leikatessa toisensa. Piirrä kuva tasoalueesta A ja laske

$$\int_0^2 \int_y^{2y} \frac{x}{\sqrt{y^3+1}}\, dx\, dy.$$

1. a) Osittaisderivaatat ovat $f_x(x,y) = 2x + 4y$ ja $f_y(x,y) = 4x + 4y$. Lisäksi $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ ja $x_s = 2t$, $y_s = -2s$, joten ketjusäännön avulla saadaan

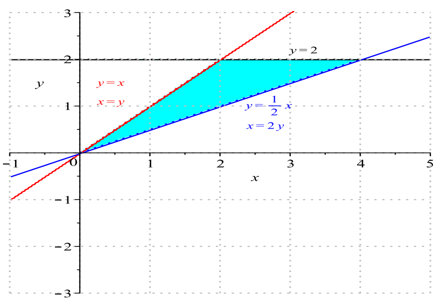
$$\begin{aligned} z_s &= f_x x_s + f_y y_s = (2x + 4y)2t + (4x + 4y)(-2s) \\ &= (2 \cdot 2st + 4t^2 - 4s^2)2t + (4 \cdot 2st + 4t^2 - 4s^2)(-2s) \\ &= 8st^2 + 8t^3 - 8s^2t - 16s^2t - 8st^2 + 8s^3 \\ &= 8s^3 + 8t^3 - 24s^2t. \end{aligned}$$

   b) Koska $f_x(x,y) = 5x^4 e^{y^2-3y}$ ja $f_y(x,y) = x^5 e^{y^2-3y}(2y-3)$, niin $f_x(a,0) = 5a^4 e^{0^2 - 3\cdot 0} = 5a^4$ ja $f_y(a,0) = a^5 e^{0^2-3\cdot 0}(2\cdot 0 - 3) = -3a^5$. Edelleen $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, joten $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, ja siis $\vec{u}^0 = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$. Tällöin

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}^0} f(a,0) &= \nabla f(a,0) \cdot \vec{u}^0 = (f_x(a,0), f_y(a,0)) \cdot \vec{u}^0 \\ &= (5a^4, -3a^5) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{-5a^4 - 6a^5}{\sqrt{5}} = \frac{-a^4(5+6a)}{\sqrt{5}} = 0, \end{aligned}$$

   josta $a = -\frac{5}{6} \neq 0$.

   c)



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ y \le x \le 2y\}$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \int_y^{2y} x(y^3+1)^{-\frac{1}{2}}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left(\Big/_{y}^{2y} \frac{1}{2}x^2 (y^3+1)^{-\frac{1}{2}} \right) dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}((2y)^2 - y^2)(y^3+1)^{-\frac{1}{2}}\, dy \\ &= \int_0^2 \frac{3}{2} y^2 (y^3+1)^{-\frac{1}{2}}\, dy = \Big/_0^2 (y^3+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2^3+1)^{\frac{1}{2}} - (0^3+1)^{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$