031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 1. välikokeeseen 24.1.2019

1. a) Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)$$

suppenemista **sekä** integraalitestin **että** osasummien jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right),n=1,2,3,\dots,$$

avulla.

b) Potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}(x-2)^k$$

suppenemissäde $R=1$. Suppeneeko potenssisarja pisteessä $x=2\frac{1}{2}$? Miksi? Entä suppeneeko potenssisarja pisteissä $x<0$? Miksi?

1. a) Integraalitesti:

Tarkastellaan funktiota $f(x)=(x+5)^{-1}-(x+6)^{-1}$, kun $x\geq 1$.

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}>0$, kun $x\geq 1$. Lisäksi

$$f'(x)=-(x+5)^{-2}+(x+6)^{-2}=-\frac{2x+11}{(x+5)^2(x+6)^2}<0,$$

kun $x\geq 1$, joten f on vähenevä funktio.

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right)dx=\Big/_1^{\infty}(\ln|x+5|-\ln|x+6|)=\Big/_1^{\infty}\ln\left|\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{6}{x}}\right|=0-\ln(\frac{6}{7})<\infty,$$

joten epäoleellinen integraali suppenee. Sarja suppenee integraalitestin nojalla.

Muodostetaan osasummien jono

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)\\&=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)\\&=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+6},\ n=1,2,\dots,\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+6}\right)=\frac{1}{6}.$$

Sarja siis suppenee.

b) Koska potenssisarjan suppenemissäde $R=1$, potenssisarja suppenee varmasti, kun

$$|x-2|<1\qquad -1<x-2<1\qquad 1<x<3.$$

Piste $x=2\frac{1}{2}$ on selvästi tämän välin sisäpuolella, joten potenssisarja suppenee pisteessä $x=2\frac{1}{2}$. Pisteet $x<0$ ovat välin $1<x<3$ ulkopuolella, joten potenssisarja hajaantuu pisteissä $x<0$.