031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Loppukoe 28.3.2019

VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. a) Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((7k-3)^5-(7k+4)^5\right)$$

suppenemista osasummien jonon $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left((7k-3)^5-(7k+4)^5\right), n=1,2,3,\ldots,$$

avulla. Jos sarja suppenee, laske sarjan summa. (3p)

b) Tutki sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{9k}{9k\sqrt{k}-4}$ suppenemista vertailuperiaatteen avulla. (3p)

2. Olkoon $f(x,y)=-3x^2-4xy^2+5y-3$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio.

a) Laske gradientti $\nabla f(x,y)$. (2p)

b) Määrää funktion suunnattu derivaatta pisteessä $(-2,1)$ vektorin $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$ suuntaan $(\nabla_{\vec{u}^0}f(-2,1))$. (3p)

c) Mihin suuntaan pisteessä $(-2,1)$ funktion arvot vähenevät voimakkaimmin? (1p)

3. Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu käyrän $y=x^3$, $x\geq 0$, ja suoran $y=x$ leikatessa toisensa.

a) Esitä alue A muodossa

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\},$$

missä a ja b ovat reaalilukuja sekä $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ muuttujasta x riippuvia funktioita. (2p)

b) Esitä alue A myös muodossa

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\leq y\leq d,\ g_1(y)\leq x\leq g_2(y)\},$$

missä c ja d ovat reaalilukuja sekä $g_1(y)$ ja $g_2(y)$ muuttujasta y riippuvia funktioita. (2p)

c) Laske

$$\iint_A \frac{36x^2y^2(3-2y)}{y+1}\,dA. \text{ (2p)}$$

4. Olkoon $\vec{F}(x,y,z)=(3y+4z^2)\vec{i}+(3x+7z^2)\vec{j}+(8xz+9yz)\vec{k}$ vektorikenttä. Olkoon edelleen S se osa funktiopintaa $z=f(x,y)=xy$, joka on ympyräalueen osan

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x^2+y^2\leq 9, x\geq 0, y\geq 0\}$$

yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0=\frac{(-y,-x,1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Muodosta vektorikenttä $\nabla\times\vec{F}$ ja laske vektorikentän $\nabla\times\vec{F}$ vuo pinnan S läpi napakoordinaattien avulla.

KAAVAKOKOELMA LIITTEENÄ