031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 3. välikokeeseen 27.2.2018

1. a) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa pallopinta $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ja alhaalta ylöspäin aukeava kartiopinta $z = g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}-1$. Pintojen yhteinen leikkauskäyrä xy-tasossa on $x^2+y^2=1^2$. Kuvaa kappale V sylinterikoordinaattien r, φ ja z avulla sekä laske sylinterikoordinaattien avulla integraali

$$\iiint_V 20z\sqrt{x^2+y^2}\,dV.$$

b) Olkoon $\vec{F}(x,y,z) = 3x^2z\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + (x^3+2yz)\vec{k}$ konservatiivinen vektorikenttä, jonka eräs potentiaalifunktio $U(x,y,z) = x^3z + yz^2$. Olkoon edelleen C käyrä $\vec{x}(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t\vec{k}$, $0 \le t \le 2$. Laske käyräintegraalin

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_C 3x^2z\,dx + z^2\,dy + (x^3+2yz)\,dz$$

arvo **sekä** käyrän C parametriesityksen **että** potentiaalifunktion avulla.

1. a) Kappale voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla seuraavasti:

$$V' = \{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi, r-1\le z\le\sqrt{1-r^2}\}.$$

$$\iiint_V 20z\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \iiint_{V'} 20zr r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} 20r^2z\,dz\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big/_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} 10r^2z^2\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 10r^2[(\sqrt{1-r^2})^2-(r-1)^2]\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 10r^2[1-r^2-(r^2-2r+1)]\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1(-20r^4+20r^3)\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\Big/_0^1(-4r^5+5r^4)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

b) Koska $0\le t\le 2$ ja koska $\vec{x}'(t) = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + \vec{k}$, niin

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_C 3x^2z\,dx + z^2\,dy + (x^3+2yz)\,dz = \int_0^2 [(3t^2t)1 + (t^2)2t + (t^3+2t^2t)1]\,dt$$
$$= \int_0^2 (3t^3+2t^3+3t^3)\,dt = \int_0^2 8t^3\,dt = \Big/_0^2 2t^4 = 32.$$

$\vec{x}(0) = 0\vec{\imath} + 0^2\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (0,0,0)$ ja $\vec{x}(2) = 2\vec{\imath} + 2^2\vec{\jmath} + 2\vec{k} = (2,4,2)$, joten

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = U(2,4,2) - U(0,0,0) = 16+16-(0+0) = 32.$$

2. a) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu käyrän $y = \sqrt{x}$ sekä suorien $x = 2$ ja $y = 0$ leikatessa toisensa. Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint\limits_{\partial A} (3xy^2 - 5y - 2)\,dx + (8x^3y - 5x + 1)\,dy.$$

b) Olkoon $\vec{F}(x,y,z) = 2yz\vec{i} + 20x\vec{j} + xy\vec{k}$ vektorikenttä sekä A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, jonka napakoordinaattiesitys on

$$A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 3, \pi \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Olkoon edelleen pinta S se osa paraboloidipintaa $z = f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$, joka on tasoalueen A yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Pinnan S suljettu reunakäyrä olkoon ∂S. Muodosta vektorikenttä $\nabla \times \vec{F}$ sekä laske käyräintegraalin

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint\limits_{\partial S} 2yz\,dx + 20x\,dy + xy\,dz$$

arvo Stokesin lauseen ja napakoordinaattien avulla.

2. a) Koska

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{x}\},$$

niin Greenin lauseen nojalla

$$\oint\limits_{\partial A} (3xy^2 - 5y - 2)\,dx + (8x^3y - 5x + 1)\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint\limits_A \Big[\frac{\partial}{\partial x}(8x^3y - 5x + 1) - \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - 5y - 2)\Big]\,dA$$

$$= \iint\limits_A (24x^2y - 5 - 6xy + 5)\,dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} (24x^2y - 6xy)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big/_{\!0}^{\sqrt{x}} (12x^2y^2 - 3xy^2)\,dx$$

$$= \int_0^2 (12x^3 - 3x^2)\,dx = \Big/_{\!0}^{2} (3x^4 - x^3) = 40.$$

b) Koska $\vec{F}(x,y,z) = 2yz\vec{i} + 20x\vec{j} + xy\vec{k}$, niin

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2yz & 20x & xy \end{vmatrix} = (x - 0)\vec{i} - (y - 2y)\vec{j} + (20 - 2z)\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + (20 - 2z)\vec{k} = (x, y, 20 - 2z).$$

Edelleen

$$A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 3, \pi \le \varphi \le 2\pi\},$$

joten Stokesin lauseen mukaan

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint\limits_{\partial S} 2yz\,dx + 20x\,dy + xy\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \iint\limits_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}^0\,dS$$

$$= \iint\limits_S (x, y, 20 - 2z) \cdot \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\,dS = \iint\limits_S \frac{2x^2 + 2y^2 + 20 - 2z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\,dS$$

$$= \iint\limits_A \frac{2x^2 + 2y^2 + 20 - 2(10 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA = \iint\limits_A 4(x^2 + y^2)\,dA$$

$$= \iint\limits_{A'} 4r^2\,r\,dr\,d\varphi = \int_\pi^{2\pi} \int_0^3 4r^3\,dr\,d\varphi = \int_\pi^{2\pi} \Big/_{\!0}^{3} r^4\,d\varphi = \Big/_{\!\pi}^{2\pi} 81\varphi = 81\pi.$$