031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 2. välikokeeseen 6.2.2018

1. a) Funktion $f(x,y) = -3x^2 + 12xy - 4y^3$ kriittiset pisteet ovat $(0,0)$ ja $(4,2)$. Kirjoita yhtälöpari, josta nämä kriittiset pisteet voidaan ratkaista. Määrää edelleen näiden kriittisten pisteiden laatu.

   b) Olkoon $z = g(x,y)$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio, jolla on suunnattu derivaatta kaikissa pisteissä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon edelleen $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ suuntavektori. Funktiosta $z = g(x,y)$ tiedetään, että $g_x(-1,2) = 3\sqrt{2}$ ja $g_y(-1,2) = -5\sqrt{2}$. Laske suunnattu derivaatta $\nabla_{\vec{u}^0} g(-1,2)$.

   c) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $x = 1$ ja $y = 0$ sekä käyrän $y = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$, leikatessa toisensa. Laske

$$\iint_A (7x^5y^2 - 3y^5)\, dA.$$

1. a) Kriittiset pisteet ovat gradientin nollakohtia, joten kysytty yhtälöpari on

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= -6x + 12y = 0 \\ f_y(x,y) &= 12x - 12y^2 = 0. \end{cases}$$

   Yhtälöparin osittaisderivaatoista saadaan

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -6 \\ f_{yy}(x,y) &= -24y \\ f_{xy}(x,y) &= 12. \end{aligned}$$

   Siis $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (-6)(-24y) - 12^2 = 144(y-1)$. Piste $(0,0)$ on satulapiste, sillä $D(0,0) = -144 < 0$. Piste $(4,2)$ on paikallinen maksimipiste, sillä $D(4,2) = 144 > 0$ ja $f_{xx}(4,2) = -6 < 0$.

   b) Koska $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, niin $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, ja siis $\vec{u}^0 = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}})$. Tällöin suunnattu derivaatta

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}^0} g(-1,2) &= \nabla g(-1,2) \cdot \vec{u}^0 = (g_x(-1,2), g_y(-1,2)) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \\ &= (3\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8. \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} \iint_A (7x^5y^2 - 3y^5)\, dA &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} (7x^5y^2 - 3y^5)\, dy\, dx = \int_0^1 \Big/_0^{\sqrt[3]{x}} (\frac{7}{3}x^5y^3 - \frac{1}{2}y^6)\, dx \\ &= \int_0^1 (\frac{7}{3}x^5(\sqrt[3]{x})^3 - \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x})^6)\, dx = \int_0^1 (\frac{7}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2)\, dx \\ &= \Big/_0^1 (\frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{6}x^3) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

TAI

$$\iint\limits_A (7x^5y^2 - 3y^5)\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_{y^3}^1 (7x^5y^2 - 3y^5)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \Big/_{y^3}^{1} (\frac{7}{6}x^6y^2 - 3y^5x)\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{7}{6}y^2 - 3y^5 - \frac{7}{6}(y^3)^6y^2 + 3y^5y^3)\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{7}{6}y^2 - 3y^5 - \frac{7}{6}y^{20} + 3y^8)\,dy$$

$$= \Big/_0^1 (\frac{7}{18}y^3 - \frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{18}y^{21} + \frac{1}{3}y^9) = \frac{1}{6}$$