031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 3. välikokeeseen 28.2.2017

1. a) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa alaspäin aukeava paraboloidipinta $z = f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ ja alhaalta ylöspäin aukeava kartiopinta $z = g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 3$. Pintojen yhteinen leikkauskäyrä xy-tasossa on $x^2 + y^2 = 3^2$. Kuvaa kappale V sylinterikoordinaattien r, φ ja z avulla sekä laske sylinterikoordinaattien avulla integroimalla kappaleen tilavuus.

   b) Olkoon $\vec{v}(x,y,z) = y^2z^3\vec{\imath} + 2xyz^3\vec{\jmath} + 3xy^2z^2\vec{k}$ vektorikenttä. Laske vektorikentän $\vec{v}$ divergenssi $\nabla \cdot \vec{v}$ ja roottori $\nabla \times \vec{v}$. Onko vektorikenttä $\vec{v}$ pyörteetön?

1. a) Kappale voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla seuraavasti:

$$V' = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi, r-3 \le z \le 9-r^2\}.$$

Lasketaan kappaleen tilavuus:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 1\,dV &= \iiint_{V'} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r-3}^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \Big(\Big/_{r-3}^{9-r^2} rz \Big)\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^3 [r(9-r^2) - r(r-3)]\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (-r^3 - r^2 + 12r)\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big/_0^3 \Big(-\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 + 6r^2\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{81}{4} - 9 + 54\Big)\,d\varphi \\
&= \frac{99\pi}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x} y^2z^3 + \frac{\partial}{\partial y} 2xyz^3 + \frac{\partial}{\partial z} 3xy^2z^2 \\
&= 0 + 2xz^3 + 6xy^2z = 2xz(3y^2 + z^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\
&= (6xyz^2 - 6xyz^2)\vec{\imath} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\vec{\jmath} + (2yz^3 - 2yz^3)\vec{k} \\
&= \vec{0} = (0,0,0)
\end{aligned}$$

Koska $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, vektorikenttä $\vec{v}$ on pyörteetön.

2. a) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu käyrän $y = \sqrt{x}$ sekä suorien $x = 9$ ja $y = 0$ leikatessa toisensa. Olkoon edelleen S se osa funktiopintaa $z = f(x, y) = 3xy + 1$, joka jää alueen A yläpuolelle. Laske pintaintegraali

$$\iint_S \frac{z^2 - 9x^2y^2 - 1}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}}\, dS.$$

b) Olkoon S se osa paraboloidipintaa $z = f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$, joka on puoliympyräalueen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

yläpuolella ja jonka ulkoinen yksikkönormaalivektori on

$$\vec{n}^0 = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Laske napakoordinaattien avulla vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{\imath} - 2x\vec{\jmath} + (-4z + 24)\vec{k}$ vuo pinnan S läpi.

2. a)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Koska $f_x(x, y) = 3y$ ja $f_y(x, y) = 3x$, niin

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{z^2 - 9x^2y^2 - 1}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}}\, dS \\
&= \iint_A \frac{(3xy + 1)^2 - 9x^2y^2 - 1}{\sqrt{9x^2 + 9y^2 + 1}} \sqrt{1 + (3y)^2 + (3x)^2}\, dA \\
&= \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} (9x^2y^2 + 6xy + 1 - 9x^2y^2 - 1)\, dy\, dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy\, dy\, dx \\
&= \int_0^9 \Big/_0^{\sqrt{x}} 3xy^2\, dx = \int_0^9 3x^2\, dx = \Big/_0^9 x^3 = 729.
\end{aligned}$$

b) Napakoordinaatistossa tasoalue A on alue

$$A' = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

joten

$$\begin{aligned}
\text{vuo} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0\, dS = \iint_S (2y, -2x, -4z + 24) \cdot \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS \\
&= \iint_S \frac{4xy - 4xy - 4z + 24}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS = \iint_S \frac{-4z + 24}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS \\
&= \iint_A \frac{-4(6 - x^2 - y^2) + 24}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA = \iint_A 4(x^2 + y^2)\, dA \\
&= \iint_{A'} 4r^2\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^\pi \int_0^2 4r^3\, dr\, d\varphi = \int_0^\pi \Big/_0^2 r^4\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi 16\, d\varphi = \Big/_0^\pi 16\varphi = 16\pi.
\end{aligned}$$