031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 2. välikokeeseen 7.2.2017

1. a) Olkoon $f(x,y) = x(y^2+9)$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio sekä $x(t) = \overline{\mathrm{arc}}\tan(t)$ ja $y(t) = 3t$. Muodostetaan yhdistetty funktio $z(t) = f(x(t), y(t))$. Laske osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$ sekä käytä ketjusääntöä ja esitä derivaatta $\frac{dz}{dt}$ muuttujan t avulla sievennetyssä muodossa.

b) Funktion $g(x,y,z) = 2x^2+3y^2+4xz$ pienin arvo lisäehdolla $z = 3x-2y+13$ saavutetaan pisteessä $(x,y,z) = (-3,-4,12)$. Kirjoita Lagrangen menetelmään liittyvä yhtälöryhmä, josta tämän pisteen voi yksikäsitteisesti ratkaista.

c) Suorien $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = 2$ ja $x = 0$ leikatessa toisensa muodostuu xy-tason suljettu ja rajoitettu alue. Laske integrointijärjestystä vaihtamalla

$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{2} 5x^3 e^{y^5}\, dy\, dx.$$

1. a) Koska $f_x(x,y) = y^2+9$, $f_y(x,y) = 2xy$ ja $z(t) = f(x(t), y(t))$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (y^2+9)\cdot\frac{1}{t^2+1} + 2xy\cdot 3\\
&= ((3t)^2+9)\cdot\frac{1}{t^2+1} + 2\,\overline{\mathrm{arc}}\tan(t)3t\cdot 3 = 9(t^2+1)\cdot\frac{1}{t^2+1} + 18t\,\overline{\mathrm{arc}}\tan(t)\\
&= 18t\,\overline{\mathrm{arc}}\tan(t) + 9.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} g(x,y,z) &= 2x^2+3y^2+4xz & \text{minimoitava funktio}\\ h(x,y,z) &= 3x-2y-z+13 = 0 & \text{lisäehto}\end{cases}$$

Lagrangen menetelmän käyttö johtaa yhtälöryhmään

$$\begin{cases} g_x + \lambda h_x &= 4x+4z+\lambda(+3) &= 0\\ g_y+\lambda h_y &= 6y+\lambda(-2) &= 0\\ g_z+\lambda h_z &= 4x+\lambda(-1) &= 0\\ & 3x-2y-z+13 &= 0.\end{cases}$$

c) Integroimisalue voidaan kuvata kahdella eri tavalla:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4, \frac{1}{2}x \le y \le 2\} \text{ tai } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2, 0\le x\le 2y\}.$$

Tällöin voidaan vaihtaa integrointijärjestys ja laskea

$$\begin{aligned}
&\int_0^4\int_{\frac{1}{2}x}^{2} 5x^3e^{y^5}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{2y} 5x^3e^{y^5}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\Big/_0^{2y} \frac{5}{4}x^4e^{y^5}\right) dy\\
&= \int_0^2 \frac{5}{4}(2y)^4e^{y^5}\,dy = \int_0^2 20y^4e^{y^5}\,dy = \Big/_0^2 4e^{y^5} = 4e^{32}-4.
\end{aligned}$$