031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 1. välikokeeseen 24.1.2017

1. a) Tutki sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{(k+2)^5}$ suppenemista integraalitestin avulla.

b) Tutki vertailuperiaatteen avulla sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3k}{3k^2-1}$ suppenemista.

c) Määrää potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7}{3^k} x^k$$

suppenemissäde R. Suppeneeko potenssisarja pisteessä $x = -4$? Miksi?

1. a) Funktio $f(x) = 4(x+2)^{-5} > 0$, kun $x \geq 1$.

$$f'(x) = (-5)4(x+2)^{-6} = -20(x+2)^{-6} < 0,$$

kun $x \geq 1$, joten f on vähenevä funktio.

$$\int_1^{\infty} 4(x+2)^{-5}\, dx = -\Big/_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^4} = \frac{1}{81} < \infty,$$

joten epäoleellinen integraali suppenee. Sarja suppenee integraalitestin nojalla.

b)

$$\frac{3k}{3k^2-1} > \frac{3k}{3k^2} = \frac{1}{k} > 0$$

kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vertailusarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ hajaantuu $(0 < p = 1 \leq 1)$, joten tutkittava sarja hajaantuu vertailuperiaatteen nojalla.

c) Lasketaan raja-arvo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{7}{3^{k+1}}}{\frac{7}{3^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Suppenemissäde on

$$R = \frac{1}{L} = 3.$$

Koska potenssisarjan suppenemissäde $R = 3$, potenssisarja suppenee varmasti, kun $|x| < 3$. Piste $x = -4$ on selvästi tämän välin ulkopuolella, joten potenssisarja hajaantuu pisteessä $x = -4$. Potenssisarjan hajaantumisen pisteessä $x = -4$ voi perustella myös niin, että sijoittaa arvon $x = -4$ annettuun potenssisarjaan ja toteaa saadun sarjan

$$7\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{3}\right)^k = 7 - 7\left(\frac{4}{3}\right) + 7\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \cdots$$

geometriseksi sarjaksi, joka hajaantuu, koska kahden peräkkäisen termin suhde $-\frac{4}{3} < -1$.