031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 3. välikokeeseen 1.3.2016

1. a) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu ympyrän kaarien $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \leq 0$, ja $y = -\sqrt{4-x^2}$, $x \leq 0$, sekä suoran $x = 0$ leikatessa toisensa. Laske napakoordinaattien avulla

$$\iint\limits_A 2(x^2+y^2+2)^{-2}\,dA.$$

b) Olkoon C käyrä $\vec{x}(t) = (t-1)\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + 3t\vec{k}$ pisteestä $(-1,0,0)$ pisteeseen $(0,-2,3)$. Laske käyräintegraalin

$$\int\limits_C (4x-3z)\,dx + 8y\,dy - 3x\,dz$$

arvo käyrän C parametriesityksen avulla.

2. a) Olkoon

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x\}$$

suljettu ja rajoitettu alue xy-tasossa. Laske Greenin lauseen avulla

$$\oint\limits_{\partial A} (2x^2y^2 - 5x)\,dx + (8x^3y + 3y)\,dy.$$

b) Olkoon V suljettu kappale, jota ylhäältä rajoittaa paraboloidipinta $z = f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$ ja alhaalta taso $z = g(x,y) = 0$. Kappale V voidaan kuvata sylinterikoordinaattien avulla muodossa

$$\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3 - r^2\}.$$

Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = (-4x+3xz+y)\vec{\imath} + (6x+4y-3yz)\vec{\jmath} + (4z^3-2xy)\vec{k}$ vuo kappaleen V pinnan S läpi divergenssilauseen ja sylinterikoordinaattien avulla.

1. a) Integroimisalue $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$ on napakoordinaateissa alue $A' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

$$\iint\limits_A 2(x^2+y^2+2)^{-2}\,dA = \iint\limits_{A'} 2(r^2+2)^{-2}\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Big/_0^2 [-(r^2+2)^{-1}]\,d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\frac{1}{6} + \frac{1}{2})\,d\varphi = \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{3}\varphi = \frac{\pi}{3}$$

b)

$$\begin{cases} (t-1,-2t,3t) &= (-1,0,0), \quad \text{käyrän alkupiste} \\ (t-1,-2t,3t) &= (0,-2,3), \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases} ; \begin{cases} t &= 0, \quad \text{käyrän alkupiste} \\ t &= 1. \quad \text{käyrän loppupiste} \end{cases}$$

Siis $0 \leq t \leq 1$ ja koska $\vec{x}'(t) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, niin

$$\int\limits_C (4x-3z)\,dx + 8y\,dy - 3x\,dz = \int_0^1 [(4(t-1) - 9t)1 - 16t(-2) - 3(t-1)3]\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t - 4 - 9t + 32t - 9t + 9)\,dt = \int_0^1 (18t+5)\,dt$$

$$= \Big/_0^1 (9t^2 + 5t) = 14.$$

2. a) Greenin lauseen nojalla

$$\oint\limits_{\partial A} (2x^2y^2 - 5x)\,dx + (8x^3y + 3y)\,dy = \iint\limits_A \big[\frac{\partial}{\partial x}(8x^3y + 3y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^2 - 5x)\big]\,dA$$

$$= \iint\limits_A (24x^2y - 4x^2y)\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_{-x}^{2x} 20x^2y\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \Big/_{-x}^{2x} 10x^2y^2\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 10x^2[(2x)^2 - (-x)^2]\,dx = \int\limits_0^1 10x^2(4x^2 - x^2)\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 30x^4\,dx = \Big/_0^1 6x^5 = 6.$$

b)

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}^0\,dS = \iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

$$= \iiint\limits_V (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot(-4x + 3xz + y, 6x + 4y - 3yz, 4z^3 - 2xy)\,dV$$

$$= \iiint\limits_V (-4 + 3z + 4 - 3z + 12z^2)\,dV = \iiint\limits_V 12z^2\,dV$$

Siirrytään sylinterikoordinaatistoon:

$$\iiint\limits_V 12z^2\,dV = \iiint\limits_{V'} 12z^2\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{3-r^2} 12z^2\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \Big/_0^{3-r^2} 4rz^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{3}} 4r(3 - r^2)^3\,dr\,d\varphi$$

$$= -2\int\limits_0^{2\pi} \Big/_0^{\sqrt{3}} \frac{(3 - r^2)^4}{4}\,d\varphi = -2\int\limits_0^{2\pi} (-\frac{3^4}{4})\,d\varphi = 81\pi.$$