031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 2. välikokeeseen 9.2.2016

1. a) Olkoon $f(x,y) = 3x^2y - xy^2 - 5$ kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio. Laske gradientti $\nabla f(x,y)$. Mihin suuntaan pisteessä $(1,-2)$ funktion arvot vähenevät voimakkaimmin?

   b) Määrää funktion $g(x,y) = x^2 - 6xy - 2y^3$ kaikki kriittiset pisteet. Kriittisten pisteiden laatua ei tarvitse tutkia.

   c) Olkoon A se xy-tason suljettu ja rajoitettu alue, joka muodostuu suorien $y = x$, $y = 2x$ ja $x = 1$ leikatessa toisensa. Laske

$$\iint_A 6y(x^3+2)^2\,dA.$$

1. a) Koska $f_x(x,y) = 6xy - y^2$ ja $f_y(x,y) = 3x^2 - 2xy$, niin gradientti $\nabla f(x,y) = (6x-y)y\vec{\imath} + (3x - 2y)x\vec{\jmath} = ((6x-y)y, (3x-2y)x)$. Funktion f arvot vähenevät voimakkaimmin pisteessä $(1,-2)$ suuntaan $-\nabla f(1,-2) = -(6+2)(-2)\vec{\imath} - (3+4)1\vec{\jmath} = 16\vec{\imath} - 7\vec{\jmath}$.

   b) Kriittiset pisteet ovat gradientin nollakohtia:

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 2x - 6y = 0 \qquad\qquad x = 3y \\ g_y(x,y) &= -6x - 6y^2 = 0. \end{cases}$$

   Sijoitetaan 2. yhtälöön $x = 3y$: $-6y(3+y) = 0 \qquad y = 0$ tai $y = -3$.
   Sijoitetaan 1. yhtälöön $y = 0$: $x = 0$. Sijoitetaan 1. yhtälöön $y = -3$: $x = -9$.
   Kriittiset pisteet ovat $(x,y) = (0,0)$ ja $(x,y) = (-9,-3)$.

   c)

$$\iint_A 6y(x^3+2)^2\,dA = \int_0^1 \int_x^{2x} 6y(x^3+2)^2\,dy\,dx = \int_0^1 \Big/_{x}^{2x} 3y^2(x^3+2)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 3(4x^2 - x^2)(x^3+2)^2\,dx = \int_0^1 9x^2(x^3+2)^2\,dx$$

$$= \Big/_0^1 (x^3+2)^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$