031075P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI II

Ratkaisut 1. välikokeeseen 26.1.2016

1. a) Osoita sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})$$

hajaantuvaksi osasummien jonon

$$(S_n)_{n=1}^{\infty}, S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k}), n = 1, 2, 3, \ldots,$$

avulla.

b) Osoita sarja $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$ suppenevaksi integraalitestin avulla.

c) Laske potenssisarjojen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(3x) - 3x\cosh(x)}{x^2\ln(1+x)}.$$

1. a) Muodostetaan osasummien jono

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{0}-\sqrt{1}) + (\sqrt{1}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n-2}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) \\ &= -\sqrt{n},\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty.$$

Sarja siis hajaantuu.

b) Integraalitesti:
Tarkastellaan funktiota $f(x) = xe^{-x^2}$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x) = xe^{-x^2} > 0$, kun $x \geq 1$.

Funktio $f(x)$ on vähenevä, sillä $f'(x) = 1e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2} < 0$, kun $x \geq 1$.

Epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} (-\frac{1}{2}e^{-x^2}) = \frac{1}{2e} < \infty.$$

Sarja suppenee integraalitestin nojalla.

c) Tunnetaan Maclaurinin kehitelmät

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}, \\
\cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \ |x| < 1,
\end{aligned}$$

joten saadaan

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(3x) - 3x\cosh(x)}{x^2\ln(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots - 3x(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots)}{x^2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x + \frac{3^3x^3}{3!} + \frac{3^5x^5}{5!} + \frac{3^7x^7}{7!} + \cdots - 3x - \frac{3x^3}{2!} - \frac{3x^5}{4!} - \frac{3x^7}{6!} - \cdots}{x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{3^3}{3!} - \frac{3}{2!})x^3 + (\frac{3^5}{5!} - \frac{3}{4!})x^5 + (\frac{3^7}{7!} - \frac{3}{6!})x^7 + \cdots) : x^3}{(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + \cdots) : x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3^3}{3!} - \frac{3}{2!} + (\frac{3^5}{5!} - \frac{3}{4!})x^2 + (\frac{3^7}{7!} - \frac{3}{6!})x^4 + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots} = \frac{3^3}{3!} - \frac{3}{2!} = 3.
\end{aligned}$$