

031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

2. välikoe 26.10.2023

VÄLIVAIHEET JA PERUSTELUT NÄKYVIIN, KIITOS!

1. (a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - 1 + e^{-6x}}$$

l'Hospitalin säännön avulla. (2p)

- (b) Määrittää funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$ kriittiset pisteet. Määrittää kriittisten pisteiden laatu funktion toisen derivaatan $f''(x)$ avulla. (4p)
2. (a) Voidaan osoittaa, että funktiolla $f(x) = 3x + \cos(x)$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Määrittää $(f^{-1})'(1)$. (3p)
- (b) Olkoon

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \\ y(t) = \ln(2t^2 + 1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

xy -tason käyrä.

Tutki, millä parametrin t arvoilla tangentin kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. (3p)

3. (a) Olkoon kompleksiluku $z = -\sqrt{3} - i$. Määrittää $|z| = r$. Esitä z eksponenttimuodossa $z = re^{i\varphi}$, missä $\varphi \in [0, 2\pi[$. Piirrä z kompleksitasoon. (3p)
- (b) Laske

$$\int \frac{3x}{\sqrt{4x+1}} dx$$

osittaisintegroimalla tai sijoitusta $t = \sqrt{4x+1}$ käyttäen. (3p)

4. (a) Määrittää käyrän $y = f(x) = -x^2 + 4x$, x -akselin ja suorien $x = -1$ ja $x = 4$ rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala. (3p)

- (b) Määrittää

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx. \quad (3p)$$

KAAVAKOKOELMA SEURAAVALLA SIVULLA

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (ax^2 + bx + c = 0)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$d(P_1, l) = \frac{\|\vec{u} \times (\overrightarrow{AP_1})\|}{\|\vec{u}\|} \quad d(P_1, T) = \frac{|\vec{n} \cdot (\overrightarrow{AP_1})|}{\|\vec{n}\|}$$

x	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin x = -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \quad D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad D \sin x = \cos x \quad D \cos x = -\sin x \quad D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$De^x = e^x \quad Da^x = a^x \ln a (a > 0) \quad D \ln |x| = \frac{1}{x} \quad D \log_a |x| = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$D \operatorname{arcsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D \operatorname{arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D \operatorname{arctan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ missä } y_0 = f(x_0)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan} x + C$$

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_r)^{k_r} (x^2+c_1x+d_1)^{l_1} \dots (x^2+c_sx+d_s)^{l_s};$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \dots + \frac{A_{r,k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}$$

$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + c_1x + d_1} + \dots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + c_1x + d_1)^{l_1}} + \dots$$

$$+ \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{x^2 + c_sx + d_s} + \dots + \frac{B_{s,l_s}x + C_{s,l_s}}{(x^2 + c_sx + d_s)^{l_s}}$$