031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 3. välikokeeseen 26.10.2017

1. a) Osoita tarkasti derivaatan avulla, että funktio $f(x) = \ln(2x^2+3) - 2x^2 - 3$ on aidosti vähenevä, kun $x > 0$.

   b) Laske L'Hospitalin säännöllä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\cos(3x) - 1}.$$

   c) Määrää ne käyrän

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 8\overline{\text{arc}}\tan(t) + 1, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   pisteet, joissa tangentin kulmakerroin on 4.

1. a) Funktio $f(x) = \ln(2x^2+3) - 2x^2 - 3$, $x > 0$, on jatkuva ja derivoituva. Lisäksi

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+3} - 4x = \frac{4x - 8x^3 - 12x}{2x^2+3} = -\frac{8x\overbrace{(x^2+1)}^{>0}}{\underbrace{2x^2+3}_{>0}} < 0 \text{ kaikilla } x > 0,$$

   joten funktio on aidosti vähenevä.

   b)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\cos(3x) - 1} \underset{[\frac{0}{0}]}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)}{-3\sin(3x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{3\sin(3x)} \underset{[\frac{0}{0}]}{\overset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1\sin(x) + x\cos(x)}{9\cos(3x)} = \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

   c) Tangentin kulmakerroin on 4, kun

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{8}{t^2+1}}{2} = 4 \qquad t = 0.$$

   Kysytty piste on $(x(0), y(0)) = (2\cdot 0 - 3, 8\overline{\text{arc}}\tan(0) + 1) = (-3, 1)$.

2. a) Laske

$$\int_0^1 \frac{9x}{(x+1)(x-2)^2}\,dx.$$

   b) Käyrä

$$y = f(x) = \sqrt{x\cos(x)}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$$

   pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuneen kappaleen tilavuus osittaisintegroimalla.

2. a) Osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned} \frac{9x}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ \frac{9x}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{(x-2)^2A + (x+1)(x-2)B + (x+1)C}{(x+1)(x-2)^2} \\ \frac{9x}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx + C}{(x+1)(x-2)^2} \\ \frac{0x^2 + 9x + 0}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{(A+B)x^2 + (-4A - B + C)x + 4A - 2B + C}{(x+1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Osoittajia vertaamalla saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A & +B & & = 0 \\ -4A & -B & +C & = 9 \\ 4A & -2B & +C & = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan $B = -A$ ylimmästä yhtälöstä ja sijoitetaan kahteen alempaan yhtälöön. Tällöin yhtälöstä $-3A + C = 9$ saadaan $C = 9 + 3A$, joka sijoitetaan yhtälöön $6A + C = 0$. Tästä saadaan $A = -1$ ja sijoittamalla edelleen $C = 6$, $B = 1$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{9x}{(x+1)(x-2)^2}\,dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + 6(x-2)^{-2}\right) dx \\ &= \Big/_0^1 \left(-\ln|x+1| + \ln|x-2| - \frac{6}{x-2}\right) \\ &= -\ln(2) + \ln(1) + 6 - (-\ln(1) + \ln(2) + 3) = -2\ln(2) + 3. \end{aligned}$$

b) Pyörähdyskappaleen tilavuus:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{x\cos(x)})^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}\,dx \\ &\overset{\text{os.int.}}{=} \pi \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}\,dx \\ &= \tfrac{\pi^2}{2} - \pi \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x)) = \pi(\tfrac{\pi}{2} - 1). \end{aligned}$$