031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 2. välikokeeseen 5.10.2017

1. a) Olkoon $f(x) = \sqrt{x^2+1}+1$ funktio, jonka määritysjoukko $M_f = [-\sqrt{3}, 0]$ ja kuvajoukko $K_f = [2,3]$. Muodosta funktion f käänteisfunktio $y = f^{-1}(x)$ määritysjoukkoineen $M_{f^{-1}}$.

   b) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(4x)}{\sqrt{7x+9}-3}.$$

   c) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{\sqrt{16x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}}.$$

   d) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1. a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}+1$, $M_f = [-\sqrt{3}, 0]$ ja $K_f = [2,3]$.
   Merkitään $y = \sqrt{x^2+1}+1$, jolloin $y \in [2,3]$.

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2+1}+1 \\
y-1 &= \sqrt{x^2+1} \quad \Big| (\cdot)^2 \quad \text{(molemmat puolet } \geq 0) \\
y^2-2y+1 &= x^2+1 \\
x^2 &= y^2-2y \quad \Big| -\sqrt{\cdot} \leq 0 \\
x &= -\sqrt{y^2-2y} = f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

   Siis $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2-2x}$, $M_{f^{-1}} = K_f = [2,3]$.

   b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(4x)}{\sqrt{7x+9}-3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{7x+9}+3)x\sin(4x)}{(\sqrt{7x+9}+3)(\sqrt{7x+9}-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{7x+9}+3)x\sin(4x)}{7x+9-9}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{7x+9}+3)x\sin(4x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{7x+9}+3)\sin(4x)}{7} = 0$$

   c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{\sqrt{16x^2+3}-\sqrt{4x^2+5}} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2(16+\frac{3}{x^2})}-\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{|x|\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}} \overset{x\leq 0}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{-x\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{-x(\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{8}{-(\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}})} \\
&= \frac{8}{-(\sqrt{16}-\sqrt{4})} = -4
\end{aligned}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+x+1})(x-\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})\sqrt{x^2+1}}{x^2-(\sqrt{x^2+x+1})^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x^2-x^2-x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})\,|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x-1} \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-(x+\sqrt{x^2+x+1})x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-(x+\sqrt{x^2+x+1})\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$$