031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 1. välikokeeseen 21.9.2017

1. a) Ratkaise epäyhtälö $-11x^2+10x+1 \geq 0$.

   b) Tason $T: \vec{q} = \vec{0} + r\vec{v} + s\vec{w} = r(-1,0,-2) + s(0,-2,3)$, $r,\ s \in \mathbb{R}$, normaalivektori $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Määrää pisteen $P_1(-3,3,4)$ etäisyys tasosta T. Suora $l: \vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, kulkee pisteen $A(-3,3,5)$ kautta ja sen suuntavektori $\vec{u} = \vec{n}$, missä $\vec{n}$ on tason T normaalivektori. Määrää pisteen $P_1(-3,3,4)$ etäisyys suorasta l.

   c) Määrää funktion
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$
määritysjoukko M_f.

1. a) Nollakohdat:
$$-11x^2+10x+1=0 \qquad x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+44}}{-22} = \begin{cases} -\frac{1}{11} \\ 1. \end{cases}$$
Koska kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli, on
$$-11x^2+10x+1 \geq 0 \qquad -\frac{1}{11} \leq x \leq 1.$$

   b)
$$\begin{aligned}
d(P_1,T) &= \frac{|\vec{n} \cdot (\overrightarrow{AP_1})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-4,3,2)\cdot(-3,3,4)|}{\|(-4,3,2)\|} \\
&= \frac{|12+9+8|}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \\
d(P_1,l) &= \frac{\|\vec{u} \times (\overrightarrow{AP_1})\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|(-4,3,2)\times(0,0,-1)\|}{\|(-4,3,2)\|} \\
&= \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}} = \frac{\|(-3,-4,0)\|}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}
\end{aligned}$$

   c)
$$\begin{aligned}
M_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 4-x^2 \geq 0 \text{ ja } 4-x^2 \neq 0\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ ja } x \neq \pm 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} =]-2,2[
\end{aligned}$$