031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

Ratkaisut 3. välikokeeseen 20.10.2016

1. a) Piste $(-1,0)$ on yhtälön $e^y + 2xy - x = 2$ määrittelemällä käyrällä, sillä

$$\begin{aligned} e^0 + 2(-1)0 - (-1) &= 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$\begin{aligned} e^{y(x)}y'(x) + 2y(x) + 2xy'(x) - 1 &= 0 \\ y'(x)(e^{y(x)} + 2x) &= -2y(x) + 1. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $(x, y(x)) = (-1, 0)$ voidaan $y'(-1)$ ratkaista:

$$\begin{aligned} y'(-1)(e^0 - 2) &= -0 + 1 \\ y'(-1) &= -1. \end{aligned}$$

b) Parametrin t arvo pisteessä $(0,-1)$ on

$$\begin{cases} \ln(t+1) &= 0 \\ (t-1)^3 &= -1 \end{cases} \qquad t = 0 > -1.$$

Tangentin kulmakerroin on

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3(t-1)^2}{\frac{1}{t+1}} = 3(t-1)^2(t+1),$$

joten

$$\frac{y'(0)}{x'(0)} = 3(0-1)^2(0+1) = 3.$$

Tangentin kulmakerroin on nolla, kun

$$3(t-1)^2(t+1) = 0 \qquad t = 1 \in]-1,\infty[\ \text{ tai } \ t = -1 \notin]-1,\infty[.$$

Kysytty piste on $(x(1), y(1)) = (\ln(1+1), (1-1)^3) = (\ln(2), 0)$.

2. a) Leikkauspisteiden x-koordinaatti:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2 - 4 \qquad \begin{aligned} &x(x^2-4) = 0 \\ &x = -2 \ \text{ tai } \ x = 0 \ \text{ tai } \ x = 2. \end{aligned}$$

Koska $f(x) - g(x) = x^3 - 4x \geq 0$, kun $-2 \leq x \leq 0$, ja $f(x) - g(x) = x^3 - 4x < 0$, kun $0 < x < 2$, niin

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right| dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)\, dx \\ &= \Big/_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right) + \Big/_{0}^{2} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right) \\ &= -4 + 8 - 4 + 8 = 8. \end{aligned}$$

b) Osamurtokehitelmä:

$$\frac{2x+7}{\underbrace{(x^2+4x+7)}_{>0}x} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+7} + \frac{C}{x}$$

$$\frac{2x+7}{(x^2+4x+7)x} = \frac{x(Ax+B) + (x^2+4x+7)C}{(x^2+4x+7)x}$$

$$\frac{2x+7}{(x^2+4x+7)x} = \frac{Ax^2 + Bx + Cx^2 + 4Cx + 7C}{(x^2+4x+7)x}$$

$$\frac{0x^2+2x+7}{x(x^2+4x+7)} = \frac{(A+C)x^2 + (B+4C)x + 7C}{(x^2+4x+7)x}.$$

Osoittajia vertaamalla saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A \quad\quad\quad +C &= 0 \\ \quad\quad B \quad +4C &= 2 \\ \quad\quad\quad\quad 7C &= 7. \end{cases}$$

Ratkaistaan $C = 1$ alimmasta yhtälöstä ja sijoitetaan ylempiin yhtälöihin. Toisesta yhtälöstä saadaan $B = -2$ ja ensimmäisestä yhtälöstä $A = -1$. Tällöin kaikki integraalifunktiot

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,dx &= \int \frac{2x+7}{x(x^2+4x+7)}\,dx = \int (\frac{-x-2}{x^2+4x+7} + \frac{1}{x})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx + \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+7) + \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Vakio C saadaan ehdosta $F(-1) = -\ln(2)$:

$$\begin{aligned} F(-1) &= -\frac{1}{2}\ln(4) + \ln|-1| + C \\ -\ln(2) &= -\frac{1}{2}\ln(4) + C \\ C &= 0, \end{aligned}$$

joten kysytty integraalifunktio on

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+7) + \ln|x| = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4x+7}}.$$