

## 031010P MATEMATIIKAN PERUSKURSSI I

### Ratkaisut 2. välikokeeseen 29.9.2016

1. a) Olkoon  $f(x) = -x^2 - 4$  funktio, jonka määrittäjäjoukko  $M_f = [1, \infty[$  ja kuvajoukko  $K_f = ]-\infty, -5]$ .  
Olkoon edelleen  $g(x) = \sqrt{x-4}$  funktio, jonka määrittäjäjoukko  $M_g = [6, \infty[$  ja kuvajoukko  $K_g = [\sqrt{2}, \infty[$ .  
Muodosta yhdistetty funktio  $f \circ g$  ja esitä se sievennetyssä muodossa. Määrä yhdistetyn funktion  $f \circ g$  määrittäjäjoukko  $M_{f \circ g}$ .

- b) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2(x^2 - 9)}.$$

- c) Laske seuraava raja-arvo käyttämättä derivaattaa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{25x^2 + 7}}{x}.$$

1. a)

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x-4}) = -(\sqrt{x-4})^2 - 4 = -(x-4) - 4 = -x \\ M_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M_g \text{ ja } g(x) \in M_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6 \text{ ja } \sqrt{x-4} \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6 \text{ ja } x \geq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\} = [6, \infty[ \end{aligned}$$

- b)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2(x^2 - 9)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{2(x-3)} = \frac{1}{4}$$

- c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{25x^2 + 7}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(5x - \sqrt{25x^2 + 7})(5x + \sqrt{25x^2 + 7})}{(5x - \sqrt{25x^2 + 7})x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25x^2 - (25x^2 + 7)}{(5x - \sqrt{x^2(25 + \frac{7}{x^2})})x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{(5x - \underbrace{|x|}_{=-x} \sqrt{25 + \frac{7}{x^2}})x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{(5 + \sqrt{25 + \frac{7}{x^2}})x^2} = 0 \end{aligned}$$